



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**ZPRACOVÁNÍ ALGORITMU PRO ŘEŠENÍ DEFORMACE
PRUTOVÝCH SOUSTAV V REÁLNÉM ČASE**

ALGORITHM FOR THE SOLUTION OF THE TRUSSES IN REAL TIME

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Pavol Šarišský

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Tomáš Návrat, Ph.D.

BRNO 2017

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student: **Pavol Šarišský**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce: **doc. Ing. Tomáš Návrat, Ph.D.**
Akademický rok: 2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Zpracování algoritmu pro řešení deformace prutových soustav v reálném čase

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Cílem práce je zpracovat algoritmus pro určování deformací (příp. napětí) u prutové soustavy v reálném čase. Nedílnou součástí je vizualizace výsledků při současné změně vstupních parametrů. Řešení bude uvažováno pouze v lineární oblasti.

Cíle bakalářské práce:

1. Zpracování postupu pro určení deformace prutových soustav založených na metodě konečných prvků
2. Vytvoření programu (MATLAB, C, C++, Python)
3. Verifikace výsledků (analytické řešení, řešení dle programu ANSYS, apod.)
4. Vizualizace výsledků v reálném čase

Seznam doporučené literatury:

Zienkiewicz, O., C., Taylor, R. L.: The finite element method, 5th ed., Arnold Publishers, London, 2000
Kolář, V., Kratochvíl, J., Leitner, F., Ženíšek, A.: Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků, SNTL Praha, 1979
Ferreira, A.J.M.: MATLAB Codes for Finite Element Analysis: Solids and Structures, 2009

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Práca sa zaoberá analýzou prútových sústav, pomocou algoritmu založenom na metóde konečných prvkov, v reálnom čase. Aplikácia Prutovka solver, používajúca daný algoritmus, je vytvorená pomocou programu Matlab. Na záver sú všetky výsledky overené analytickým výpočtom a pomocou programu ANSYS.

Summary

The thesis deals with the analysis of truss systems, using a finite element algorithm, in real time. The Prutovka solver application, using the given algorithm, is created using the Matlab software. Finally, all results are verified by analytical calculation and ANSYS software.

Klíčová slova

MKP, metóda konečných prvkov, prútová sústava, metódy riešenia prútových sústav, namáhanie prútov, Matlab, ANSYS, Prutovka solver

Keywords

FEM, Finite Element Method, truss system, methods of solving truss systems, bar loading, Matlab, ANSYS, Prutovka solver

ŠARIŠSKÝ, P. *Zpracování algoritmu pro řešení deformace prutových soustav v reálném čase*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 50 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Tomáš Návrat, Ph.D..

Prehlasujem, že bakalársku prácu na tému *Zpracování algoritmu pro řešení deformace prutových soustav v reálném čase* som vypracoval samostatne pod vedením doc. Ing. Tomáša Návrata, Ph.D. s použitím literatúry uvedenej v zozname.

Pavol Šarišský

Ďakujem môjmu školiťovi doc. Ing. Tomášovi Návratovi, Ph.D. za cenné rady, pripomienky a čas, ktorý mi pri konzultáciach venoval. Tiež ďakujem svojej rodine a priateľom za podporu počas štúdia.

Pavol Šarišský

Obsah

1	Úvod	3
2	Prútová sústava	4
2.1	Namáhanie prútov	4
2.1.1	Prostý ťah a tlak	5
2.2	Medzné stavy	5
2.2.1	Medzný stav deformácie	5
2.2.2	Medzný stav pružnosti	5
2.2.3	Vzperná stabilita prútu	6
2.3	Určenie pohyblivosti sústav telies	7
2.4	Statická určitosť prútových sústav	8
2.4.1	Vonkajšia statická určitosť	8
2.4.2	Vnútoraná statická určitosť	8
2.4.3	Celková statická určitosť	8
2.5	Metódy riešenia staticky určitých prútových sústav	9
2.5.1	Obecná styčnicková metóda	9
2.5.2	Postupná styčnicková metóda	9
2.5.3	Cremonova metóda	9
2.5.4	Priesečná metóda (Ritter)	10
2.5.5	Metóda náhradných prútov (Henneberg)	10
2.5.6	Metóda neurčitej mierky	10
2.5.7	Metóda momentových súčtov (Müller - Breslau)	10
2.6	Riešenie staticky neurčitých prútových sústav	10
2.6.1	Sústava vonkajšie staticky neurčitá	11
2.6.2	Sústava vnútorne staticky neurčitá	11
2.6.3	Sústava vonkajšie aj vnútorne staticky neurčitá	12
3	Metóda konečných prvkov (MKP)	13
3.1	Matematická formulácia problému	13
3.2	MKP ako variačná metóda	13
3.3	Algoritmus MKP	14
3.3.1	Celková (globálna) matica tuhosti a zaťaženia	17
3.3.2	Základná rovnica MKP	18
3.3.3	Základné kroky pri riešení problému metódou MKP	19
3.4	Prútové prvky	21
3.4.1	2D prúty	21
3.4.2	Matica tuhosti pre 2D prút	23
3.4.3	Napätie v 2D prútoch	23
3.4.4	Osovo zaťažný prút v 3D	24
4	Prutovka_solver	25
4.1	Popis užívateľského rozhrania Prutovka_solver	25
4.1.1	Popis oblastí užívateľského rozhrania Prutovka_solver	25

5	2D Prúťová sústava	29
5.1	Riešenie pomocou aplikácie Prutovka_solver	29
5.1.1	Vykreslenie zadania	29
5.1.2	Zadanie vonkajšieho zaťaženia	30
5.1.3	Získané výstupy	31
5.2	Analytické riešenie	33
5.2.1	Úplné uvoľnenie prúťovej sústavy	33
5.2.2	Čiastočné uvoľnenie prúťovej sústavy	34
5.3	Riešenie pomocou programu ANSYS	38
5.3.1	Získané výstupy	38
5.4	Porovnanie výsledkov	41
6	Časová náročnosť výpočtu	43
7	Záver	44
	Literatúra	47
8	Zoznam použitých symbolov a skratiek	48
9	Prílohy	50

1. Úvod

Cieľom práce je spracovať algoritmus na určovanie deformácií, napätí, bezpečností a reakčných síl vo väzbách prútových sústav v reálnom čase. Hlavným výstupom práce je aplikácia, ktorá daný algoritmus využíva.

Bakalárska práca pozostáva z piatich základných kapitól. Prvá z nich pojednáva o prútovej sústave a pojmoch s tým súvisiacich. V kapitole sú priblížené pojmy ako namáhanie prútov, pohyblivosť sústav telies či statická určitosť prútových sústav.

Nasledujúca kapitola sa zameriava na jednu z metód riešenia prútových sústav, a síce metódu konečných prvkov (MKP). V kapitole je priblížená myšlienková podstata a algoritmus MKP. Je tu vysvetlený matematický základ metódy a jeho aplikácia na konkrétnom príklade.

Ďalšia kapitola je zameraná na popis aplikácie *Prutovka_solver*. Je tu vysvetlený spôsob, ako danú aplikáciu používať.

Príklad 2D prútovej sústavy je riešený v predposlednej kapitole pomocou aplikácie, analyticky a v ANSYS-e. Jednotlivé výsledky deformácií, napätí a pod., sú vypísané v tabuľkách.

Na záver je porovnanie časovej náročnosti výpočtov a priblížený spôsob využitia výsledkov, získaných v reálnom čase.

2. Prúťová sústava

Tuhé teleso s dvoma kĺbmi, pomocou ktorých sa spája so susednými telesami alebo rámom, sa nazýva *prúť*. Zo statického hľadiska, prúťom rozumieme modelové teleso, jednoznačne určené *strednicou*, ktorá je spojnicou ťažísk priečných prierezov. V rovinnom prípade je prúťom teleso viazané k okoliu dvoma rotačnými dvojicami s rovnobežnými osami. *Osou prúťu* je spojnica stredov kĺbov (rotačných dvojíc) [5, 2].

Prúťová sústava je najjednoduchší výpočtový model priehradovej konštrukcie, tvorený prúťmi, spojených navzájom kĺbmi. V prípade, že je uloženie sústavy aj zaťaženie v jednej rovine, hovoríme o *rovinnej prúťovej sústave* [7].

Výpočtový model priehradovej konštrukcie, resp. prúťovej sústavy, je vytvorený na základe predpokladov:

- väzby medzi telesami sú rotačné kinematické dvojice (rovinná úloha) alebo sférické kinematické dvojice (priestorová úloha), v oboch prípadoch typu NNTN,

Väzba NNTN je styková väzba charakterizovaná: N - nepriepustnosťou, N - nepremennosťou, T - tlakovosťou, N - neutrálnosťou. Väzba NNTN je najjednoduchším modelom styku, za predpokladu, že priestupnosť, deformácie a spojenia telies, hranice kludovej stability a stratová energia v styku v skutočnom styku sú z hľadiska riešeného problému nepodstatné.

- jednotlivé telesá sú prúťy alebo styčnickové telesá. Uvažujú sa prúťy, ktorých *strednicou* je priamka. Styčnickové teleso spája minimálne dva prúťy, pričom stredy sférických a rotačných kinematických dvojíc splývajú. Tento spoločný bod sa nazýva *styčník*,
- silové pôsobenie je realizované len v styčnickových telesách,
- uloženie k základnému telesu je realizované stykom v styčníku. Rotačnou alebo obecnou kinematickou dvojicou pri rovinnej sústave, sférickou alebo obecnou kinematickou dvojicou pri priestorových sústavách,
- prostredníctvom styčnickových telies sú prúťy prúťovej sústavy viazané k minimálne dvom iným prúťom tak, že sú prúťy nepohyblivé. Sústava prúťov takto vytvára nepohyblivé *prúťové teleso* [2].

2.1. Namáhanie prúťov

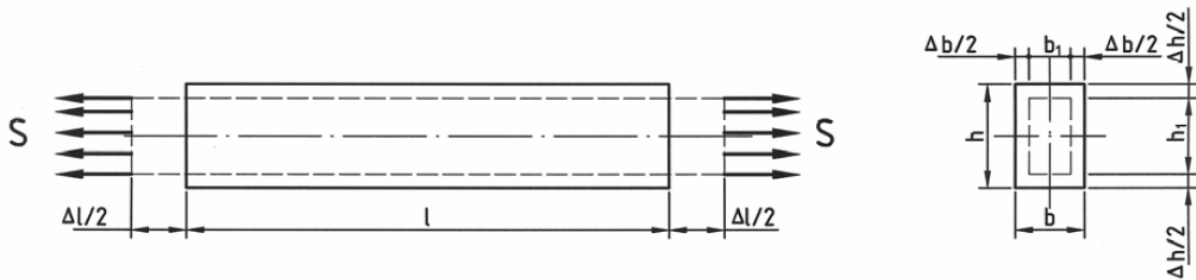
Prúť prenáša silu len v ose prúťu, preto uvažujeme namáhanie prostým ťahom, tlakom a strátou vzpernej stability. Podľa hypotézy, ktorú formuloval *Navier* zostane osa prúťu po predĺžení priama a dva susedné rovnobežné prierezy kolmé na os, ostanú aj po deformácii rovinné a navzájom rovnobežné. Z hypotézy teda vyplýva, že nevznikajú šmykové napätia (priamosť osi prúťu) a vnútorné sily sú po celej ploche rozložené rovnomerne (rovnobežnosť prierezov) [2, 6].

2.1.1. Prostý ťah a tlak

Prostý ťah (tlak) je namáhanie priameho prizmatického prútu, za predpokladu, že:

- sú splnené prútové predpoklady,
- priečne prierezy sa oddávajú (približujú) a následne deformujú (dochádza k zmene veľkosti, ale tvar sa nemení),
- jedinou nenulovou zložkou VVÚ (výsledné vnútorné účinky) je normálová sila,
- deformácie sú z hľadiska statickej rovnováhy prvku nepodstatné.

Prostý ťah (tlak) je charakteristický tým, že dĺžkové pretvorenia sú v priečnom priereze rozložené rovnomerne a uhlové pretvorenia sú nulové. Normálové napätia sú v priečnom priereze rozložené rovnomerne a šmykové napätia sú nulové. Uvažujeme jednoosú napätosť (tlakovú alebo ťahovú) [4].



Obr. 2.1: Prút namáhaný na ťah, ťahovou silou S [6]

2.2. Medzné stavy

Medzný stav je zaťažovací stav telesa, pri ktorom sa schopnosť telesa plniť funkciu kvalitatívne mení alebo úplne stráca. Na vznik medzného stavu pôsobia isté faktory, ktoré sa delia na *vonkajšie*, napr. mechanické zaťaženie, teplotné zaťaženie, chybná manipulácia, a *vnútorné*, napr. voľba materiálu, poškodenie materiálu apod.

2.2.1. Medzný stav deformácie

Pri zaťažení telesa dochádza k jeho deformácii, resp. zmene jeho rozmerov a tvaru. Tieto zmeny môžu mať vplyv na pevnosť výrobku, či pohyblivosť sústavy. Medzný stav deformácie telesa je stav, v ktorom sa deformácia funkčne prípustná mení na deformáciu funkčne neprípustnú, či už plastickú alebo elastickú.

2.2.2. Medzný stav pružnosti

Uskutočnením jedného zaťažovacieho cyklu, teda zaťažením telesa z nezaťaženého stavu na istú úroveň zaťaženia a odľahčením, môžu nastať dva prípady:

- deformácia telesa bola *pružná*, tzn. že po odľahčení sa tvar telesa vrátil do pôvodného stavu,

2.2. MEDZNÉ STAVY

(b) deformácia telesa bola nielen pružná, ale aj plastická, teda nevratná.

Medzný stav pružnosti telesa je stav, ktorého prekročením vznikajú v telese plastické deformácie.

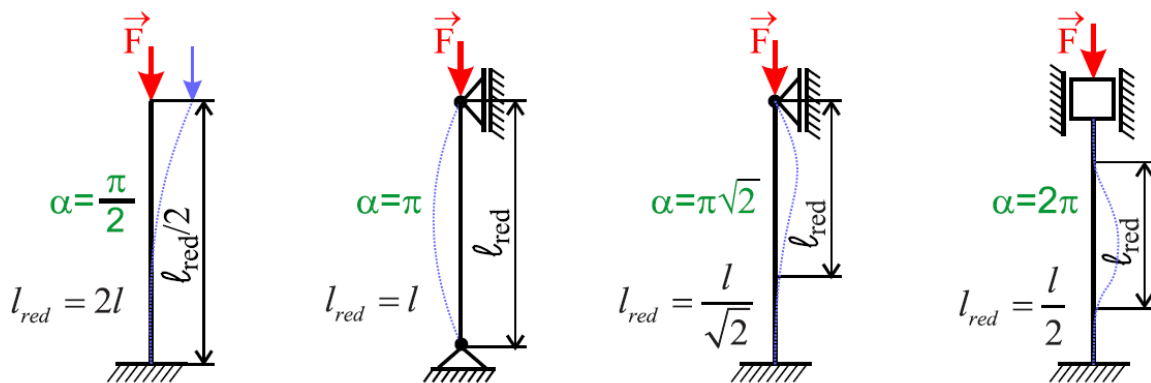
2.2.3. Vzperná stabilita prútu

Pri namáhaní tenkej tyče (pomer charakteristického rozmeru priečného prierezu k dĺžke prútu je malý) tlakom, sa v určitej chvíli podstatnou deformáciou stane ohyb, teda tyč sa začne prehýbať. *Vzper* je medzný stav vzpernej stability, pri ktorom sa mení podstatná deformácia.

Kontrola na vzper sa vykonáva v prípade *Ideálneho tlakového namáhania ideálneho prútu*, ktorý nastáva za predpokladu, že:

- strednica prútu je v nezaťaženom stave ideálne priama,
- prút je prizmatický a nešróbovitý,
- prieerez prútu je hrubostenný (t. j. všetky rozmery priečného prierezu sú rádovo rovnako veľké),
- prút je zaťažovaný dvoma rovnovážnymi osamelými silami F , ktoré pôsobia v ťažiskách čiel prútu a ich nositeľky sú totožné so strednicou prútu v nezaťaženom stave,
- materiál prútu je homogénny, izotropný a lineárne pružný,
- v priebehu zaťažovania sú splnené prútové predpoklady.

Kritická sila vzperu viazaného prútu



Obr. 2.2: Spôsoby uloženia prútov [3]

$$F_{kr} = \frac{\alpha^2 EJ}{l^2} \quad (2.1)$$

$$F_{kr} = \frac{\Pi^2 EJ}{l_{red}^2} \quad (2.2)$$

Veličina α charakterizuje spôsob uloženia prútu (obr.2.2). Redukovaná dĺžka je vzdialenosť medzi dvoma najbližšími bodmi, kde je minimálny ohybový moment na deformovanej

strednici prútu. Hodnota l_{red} závisí na spôsobe uloženia prútu. Nakoľko je vzperná stabilita priehradových konštrukcií, resp. prútových sústav, ťažko riešiteľná, určuje sa podľa normy ČSN EN 1993-1-1 Navrhování ocelových konstrukcí [3, 4].

2.3. Určenie pohyblivosti sústav telies

Pohyblivosť sústavy telies bez degenerovaných členov sa určuje zo vzťahu:

$$i = (n - 1)i_v - \left(\sum \xi_i - \eta \right) \quad (2.3)$$

kde:

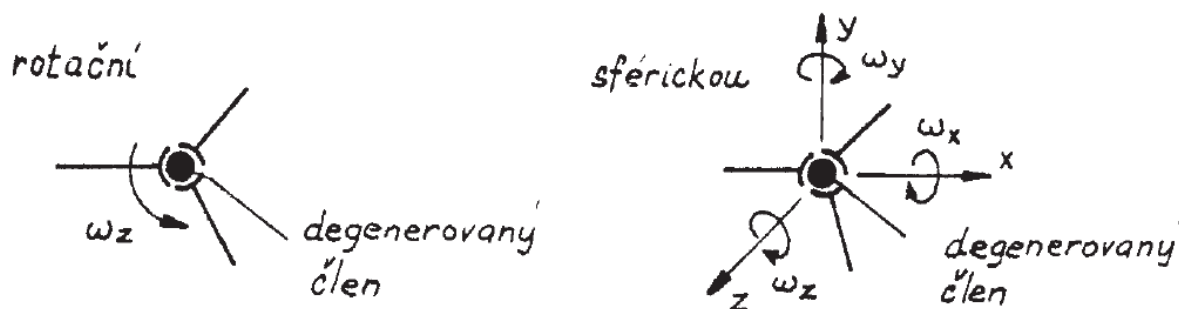
- i – počet stupňov voľnosti sústavy
- $(n - 1)$ – počet telies bez základného telesa
- i_v – počet stupňov voľnosti voľného telesa
- $\sum \xi_i$ – počet stupňov voľnosti odobraných väzbami
- η – počet obmedzených deformačných parametrov

V prípade, že sústava obsahuje degenerovaný člen, pohyblivosť určíme zo vzťahu:

$$i = (n - 1)i_v - \left(\sum \xi_i - \eta \right) - k\delta \quad (2.4)$$

kde:

- k – počet degenerovaných členov
- $\delta = 1$ – pre degen. člen s viacnásobnou rotačnou väzbou
- $\delta = 3$ – pre degen. člen s viacnásobnou sférickou väzbou



Obr. 2.3: Degenerovaný člen [2]

Válcové resp. sférické degenerované teleso má vždy 1 resp. 3 stupne voľnosti, ktoré neovplyvňujú pohyblivosť sústavy, preto je ich nutné pri určovaní stupňov voľnosti odčítat.

2.4. Statická určitost' prútových sústav

V prípade prútových sústav rozlišujeme *vonkajšiu*, *vnútornú* a *celkovú statickú určitost'*.

2.4.1. Vonkajšia statická určitost'

Vonkajšia statická určitost' prútových sústav súvisí s určením neznámych vonkajších stykových síl uvoľneného prútového telesa pomocou použiteľných podmienok statickej rovnováhy. Jej nutná podmienka je vyjadrená vzťahom:

$$\nu = \mu \quad (2.5)$$

kde:

- μ – je počet neznámych parametrov vonkajších stykových síl
- ν – je počet použiteľných statických podmienok rovnováhy (3 v rovine alebo 6 v priestore)

2.4.2. Vnútorná statická určitost'

Vnútorná statická určitost' prútových sústav súvisí s určením síl v prútoch. Podmienky statickej rovnováhy prútového telesa sú lineárne závislé na sústave podmienok statickej rovnováhy styčníc. Preto počet použiteľných podmienok statickej rovnováhy pre rovinnú prútovú sústavu je $2k$, pre priestorovú prútovú sústavu je $3k$. Podmienka vnútornej statickej určitosti má tvar:

$$\begin{aligned} 3k - 6 = p - & \text{ pre priestorovú prútovú sústavu} \\ 2k - 3 = p - & \text{ pre rovinnú prútovú sústavu} \end{aligned}$$

kde:

- k – je počet styčníc
- p – je počet prútov
- $3k$ – je počet použiteľných podmienok statickej rovnováhy prútovej sústavy v priestore
- $2k$ – je počet použiteľných podmienok statickej rovnováhy prútovej sústavy v rovine

Stupeň vnútornej statickej neurčitosti s je určený vzťahom:

$$\begin{aligned} s = p - (3k - 6) - & \text{ v priestore} \\ s = p - (2k - 3) - & \text{ v rovine} \end{aligned}$$

Za predpokladu, že prútová sústava je tvorená prútmi, ktoré vytvárajú trojuholníkové obrazce, je takáto prútová sústava zaručene staticky určitá.

2.4.3. Celková statická určitost'

Celková statická určitost' prútových sústav súvisí s určením všetkých neznámych nezávislých parametrov prútovej sústavy. Z rozboru vnútornej a vonkajšej statickej určitosti vyplýva, že podmienku celkovej statickej určitosti môžeme vyjadriť v tvare:

$$\begin{aligned} 3k = p + \mu - & \text{ pre priestorovú prútovú sústavu} \\ 2k = p + \mu - & \text{ pre rovinnú prútovú sústavu} \end{aligned}$$

2.5. Metódy riešenia staticky určitých prútových sústav

Normálové sily v prútoch prútových sústav, ktoré sú vonkajšie aj vnútorne staticky určité, sa určia niektorou z nasledujúcich metód.

2.5.1. Obecná styčnicková metóda

Pri riešení prútovej sústavy obecnou styčnickovou metódou je nutné uvoľnenie všetkých styčníc. Zostavením použiteľných podmienok statickej rovnováhy vzniká sústava lineárnych algebraických rovníc, ktorá sa v maticovom tvare zapíše ako:

$$Ax = b \quad (2.6)$$

kde:

- A – je matica sústavy, popisujúca geometriu prútovej sústavy
- x – je stĺpcová matica neznámych parametrov
- b – je stĺpcová matica úplne zadaných silových prvkov

Táto metóda je v súčasnosti pomerne rozšírená, vďaka možnosti riešiť sústavy rovníc pomocou počítačovej techniky [2].

2.5.2. Postupná styčnicková metóda

Pri riešení prútovej sústavy postupnou styčnickovou metódou je nutné riešiť rovnováhu v každom styčniku ako rovnováhu rovinného zväzku síl. Na začiatku riešenia sa určí vonkajšia všeobecná sústava síl pôsobiaca na prútovú sústavu ako celok. Táto sústava síl je tvorená reakčnými silami (vonkajšie sekundárne sily) a akčnými silami (vonkajšie primárne sily).

Poradie, v ktorom riešime rovnováhu síl v styčníkoch, nie je náhodné. Vlastný výpočet osových síl v prútoch začína vždy vo dvojnom uzle (uzol len s dvoma neznámymi silami) a pokračuje v ďalšom novovzniknutom dvojnom uzle.

Pri samotnom riešení sa predpokladá, že všetky neznáme sily v prútoch sú ťahové, čomu odpovedá znamienko (+). Ak je výsledok kladný (+), potom bol predpokladaný smer sily správny. V opačnom prípade (–) bol predpoklad nesprávny, čomu odpovedá opačná orientácia nami zvoleného smeru sily (tlak) [7].

2.5.3. Cremonova metóda

Podstatou je grafická interpretácia styčnikovej metódy, čiže grafické riešenie rovnováhy styčníc. Výsledkom tejto metódy je tzv. *Maxwellov-Cremonov diagram*.

Postup pri riešení spočíva v nakreslení vyšetrovanej sústavy vo zvolenej mierke. Potom je potrebné určiť reakčné sily vo väzbách, pričom prútovú sústavu považujeme za jediné tuhé teleso. Uzavrený zložkový obrazec vonkajších síl a reakcií sa kreslí v poradí, ako idú za sebou pri zvolenom kladnom smere obehu vonkajších prútov sústavy. Výsledkom je kostra Cremonovho diagramu. Pokračuje sa styčnikom s dvoma prútmi, ktorému sa nakreslí zložkový obrazec, dodržiujúc podmienku kladného smeru.

Metóda je vhodná pre rovinné prútové sústavy, môže byť podstatne rýchlejšia ako styčnicková metóda.

2.5.4. Priesečná metóda (Ritter)

Výhodou tejto metódy je, možnosť riešiť sily len v niektorých prútoch, bez nutnosti určovania síl vo všetkých prútoch. Je založená na delení prútovej sústavy na samostatné staticky riešiteľné sústavy. Rezy sa spravidla vedú prútmi, v ktorých sily sa zisťujú, a zároveň maximálne tromi prútmi, nepretínajúcimi sa v jednom bode. Veľkosť a orientácia síl sa určuje z použiteľných podmienok rovnováhy oddelenej časti.

2.5.5. Metóda náhradných prútov (Henneberg)

Metóda umožňuje riešiť prútové sústavy niektorou z vyššie uvedených metód, pomocou zmeny prútovej sústavy. To znamená, že je možné odobrať jeden alebo viac prútov, ale kvôli zachovaniu nutnej podmienky statickej určitosti, sa počet odobraných prútov musí rovnať počtu prútov pridaných, tzv. náhradných prútov. Na miesto odobraných prútov sa pripoja sily a určia sa sily v prútoch tým vyvolané. Potom sa určia sily v prútoch pod vonkajším zaťažením, ale bez uvažovania účinku síl nahrádzujúcich odobraný prút. Na záver sa superponujú obidva silové stavy tak, aby sa náhradný prút stal nulovým prútom, čiže bolo možné ho odstrániť.

2.5.6. Metóda neurčitej mierky

Vychádzame z predpokladu, že sily v prútoch sústavy sú priamo úmerné vonkajšiemu zaťaženiu prútovej sústavy.

Zvolíme silu v jednom prúte sústavy a určíme, ako veľká vonkajšia sila by na danej nositeľke danú silu vyvolala. Pretože je takto získaná sila odlišná od zadanej vonkajšej sily, z ich pomeru určíme mierku, ktorou je nutné všetky zistené sily v prútoch násobiť.

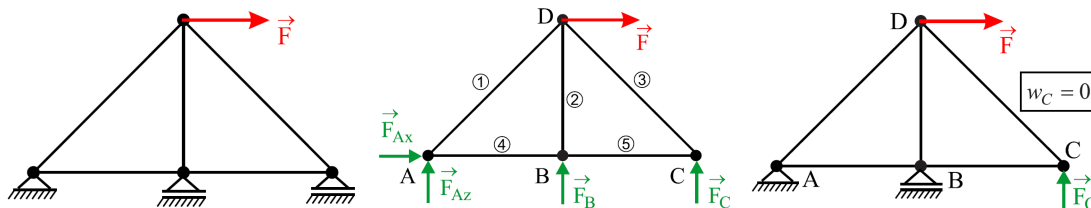
2.5.7. Metóda momentových súčtov (Müller - Breslau)

Podmienku rovnováhy každého styčníka je možné napísať ako podmienku nulového momentu síl v styčníku k ľubovoľnému obecnému bodu. Počet takto získaných momentových rovníc sa rovná počtu styčníkov. Sila v určitom prúte sa bude vyskytovať vždy v dvoch rovniciach, a po sčítaní všetkých momentových rovníc je možné správnou voľbou bodov, ku ktorým sa počítajú momenty, dosiahnuť toho, že sa osovú silu vyrušia, až na tú silu, ktorú chceme určiť [5].

2.6. Riešenie staticky neurčitých prútovej sústav

Ak je sústava staticky neurčitá, znamená to, že na určenie osových síl v prútoch nestačia len statické podmienky rovnováhy styčníkov, ale je nutné ich doplniť deformačnými podmienkami, ktoré vychádzajú z čiastočného uvoľnenia. Počet deformačných podmienok je rovný stupňu statickej neurčitosti s . Rozlišujú sa dva typy statickej neurčitosti: vonkajšia a vnútorná.

2.6.1. Sústava vonkajšie staticky neurčitá



Obr. 2.4: Sústava vonkajšie staticky neurčitá, úplné a čiastočné uvoľnenie [3]

Statický rozbor:

$$\begin{aligned}\mu &= 4, \nu = 3 \\ s_{ex} &= \mu_{ex} - \nu = 4 - 3 = 1 \\ s_{in} &= p - (2k - 3) = 5 - (2 \cdot 4 - 3) = 0\end{aligned}$$

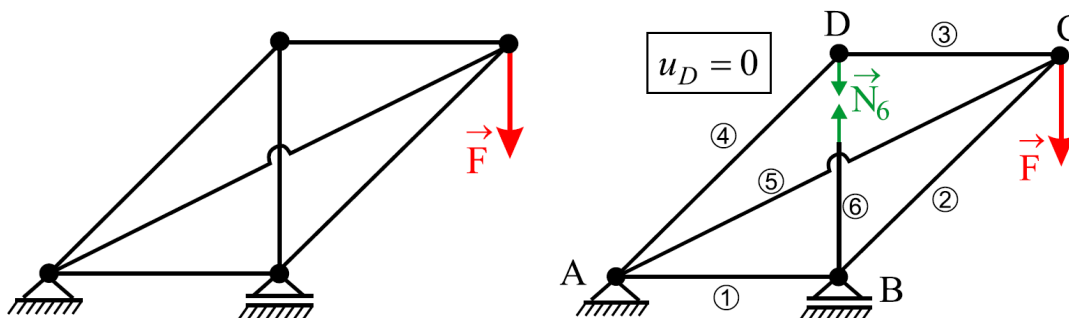
Zo statického rozboru vyplýva, že daná prúťová sústava (obr.2.4) je 1-krát vonkajšie staticky neurčitá a vnútorne staticky určitá.

Úplné uvoľnenie prúťovej sústavy na zostavenie použiteľných statických podmienok vykonáme uvoľnením od základného telesa.

Čiastočné uvoľnenie na formuláciu väzbových deformačných podmienok vykonáme na úrovni staticky určitého uloženia voči základnému telesu [4, 3].

2.6.2. Sústava vnútorne staticky neurčitá

Ak má prúťová sústava viac prútov, ako je počet použiteľných statických rovníc, je daná sústava vnútorne staticky neurčitá.



Obr. 2.5: Sústava vnútorne staticky neurčitá, čiastočné uvoľnenie [3]

Statický rozbor:

$$\begin{aligned}\mu_{ex} &= 3, \nu = 3 \\ s_{ex} &= \mu_{ex} - \nu = 3 - 3 = 0 \\ s_{in} &= p - (2k - 3) = 6 - (2 \cdot 4 - 3) = 1\end{aligned}$$

Zo statického rozboru vyplýva, že daná prúťová sústava (obr.2.5) je vonkajšie staticky určitá a 1-krát vnútorne staticky neurčitá.

Pri čiastočnom uvoľnení sa uvoľní toľko prútov v styčníku, koľkokrát je sústava vnútorne staticky neurčitá, tzn. s_{in} prútov. Zavedie sa normálová sila na konci uvoľneného prúta a sila rovnako veľká, opačne orientovaná v styčníku, s ktorým bol prút spojený. Zostaví sa väzbová deformačná podmienka v mieste uvoľnenia prútu, vyjadrujúca vzájomný posuv rozpojených bodov.

2.6.3. Sústava vonkajšie aj vnútorne staticky neurčitá

Takáto sústava je kombináciou predchádzajúcich dvoch prípadov, teda je nutné zostaviť obidva typy deformačných podmienok.

Nezávisle na type statickej neurčitosti je väzbovou deformačnou podmienkou vyjadrenie posuvu v danom mieste, ktorý sa určí pomocou *Castiglianovej vety*, vyjadrujúcej vzťah medzi deformáciou telesa a energiou akumulovanou v telese vplyvom zaťaženia [4, 3].

3. Metóda konečných prvkov (MKP)

Ľudská myseľ, často, nedokáže pochopiť zložitý problém len v jednom kroku. To je dôvod, prečo sa ľudia naučili komplexné problémy deliť na menšie, jednoduchšie oblasti, ktorých správanie je oveľa čitateľnejšie a jednoduchšie predvídateľné. Riešenie, pôvodne komplexného problému, potom vzniká zjednotením riešení jednotlivých jednoduchých častí. Takáto diskretizácia spojitých problémov môže byť dvojakého druhu. Matematici vytvorili všeobecne použiteľné techniky, aplikovateľné priamo na diferenciálne rovnice popisujúce problém. Na druhej strane, inžiniersky prístup je oveľa intuitívnejší. Spočíva vo vytváraní analógií medzi správaním elementu skúmanej oblasti a oblasti ako celku [9].

3.1. Matematická formulácia problému

Rozlišujeme dva spôsoby prístupu k riešeniu problému: *diferenciálny* a *variačný*. Diferenciálny prístup formuluje problém v podobe diferenciálnych rovníc. Variačný prístup je založený na hľadaní stavu, v ktorom energia analyzovaného telesa dosiahne extrémnu hodnotu, tzn. hľadanie stacionárneho stavu. Variačná metóda je veľmi aktuálna, najmä v súvislosti s numerickými metódami a MKP.

3.2. MKP ako variačná metóda

Základom je *Lagrangeov variačný princíp*, ktorý hovorí, že zo všetkých funkcií posuvov sa realizujú tie, ktoré minimalizujú hodnotu celkovej potenciálnej energie Π .

$$\Pi = W - P \quad (3.1)$$

kde W je energia napätosti telesa Ω

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T \cdot \varepsilon \cdot dV \quad (3.2)$$

a P je potenciál vonkajšieho zaťaženia

$$P = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{o} \cdot dV + \int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{p} \cdot dS \quad (3.3)$$

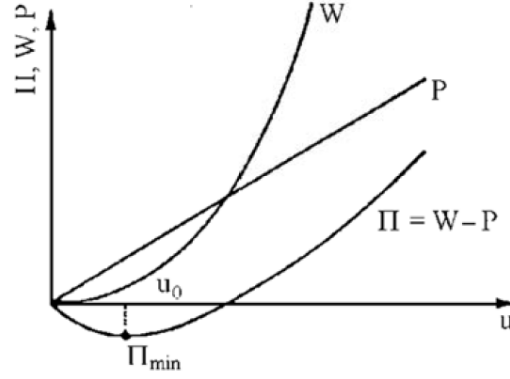
Matice vystupujúce vo vzťahoch 3.2 a 3.3:

posuvy	$\mathbf{u}^T = [u, v, w]$
pretvorenia	$\varepsilon^T = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]$
napätia	$\sigma^T = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]$
objemové zaťaženie	$\mathbf{o}^T = [o_x, o_y, o_z]$
plošné zaťaženie	$\mathbf{p}^T = [p_x, p_y, p_z]$

Posuv u_0 , ktorý minimalizuje hodnotu celkovej potenciálnej energie získame z podmienky:

$$\frac{d\Pi}{du} = 0 \quad (3.4)$$

3.3. ALGORITMUS MKP



Obr. 3.1: Celková potenciálna energia [8]

Vo všeobecnosti potenciálna energia Π nie je závislá len na posuve u jedného bodu v jednom smere, ale je závislá na spojitých funkciách u, v, w , závislých na premenných x, y, z , čiže $\Pi(u, v, w)$. Takto získavame nekonečnú množinu hodnôt posuvov vo všetkých smeroch nekonečného množstva bodov skúmaného prvku. Nakoľko, MKP je založené na riešení konečného počtu prvkov, je potrebné každú z funkcií aproximovať pomocou bázo- vých funkcií: $N_i(x, y, z)$, $N_j(x, y, z)$, $N_k(x, y, z)$. Tie charakterizujú správanie bodov medzi dvoma uzlami prvku. Uzly sú charakterizované posuvami u_i, v_j, w_k . Posuv ľubovoľného vnútorného bodu prvku je určený posuvom uzlových bodov:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_{i=1}^l N_i(x, y, z) \cdot u_i \\ v(x, y, z) &= \sum_{j=1}^m N_j(x, y, z) \cdot v_j \\ w(x, y, z) &= \sum_{k=1}^n N_k(x, y, z) \cdot w_k \end{aligned} \quad (3.5)$$

Takto získavame celkovú potenciálnu energiu Π závislú na konečnom počte parametrov $\Pi(u_1, u_2, u_3, \dots, w_n)$. Neznáme parametre určíme z Lagrangeovho variačného princípu, resp. podmienky na určenie stacionárneho bodu funkcie:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial w_n} = 0 \rightarrow u_1, u_2, \dots, w_n \quad (3.6)$$

3.3. Algoritmus MKP

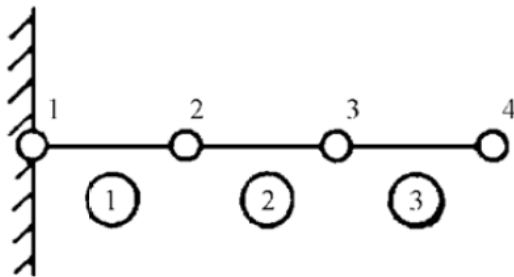
Na obr. (3.2) je prútový prvok rozdelený na tri prvky a štyri uzly. Pre jednoduchosť budeme uvažovať prvok č.1 a jeho deformáciu len v jednom smere, ktorú aproximujeme, ako:

$$u(x) = \mathbf{N} \cdot \delta \quad (3.7)$$

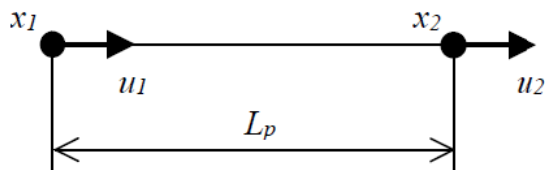
kde:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= [N_1, N_2] \quad \text{je matica bázo- vých funkcií} \\ \delta &= [u_1, u_2]^T \quad \text{je transformovaná matica deformačných parametrov} \end{aligned}$$

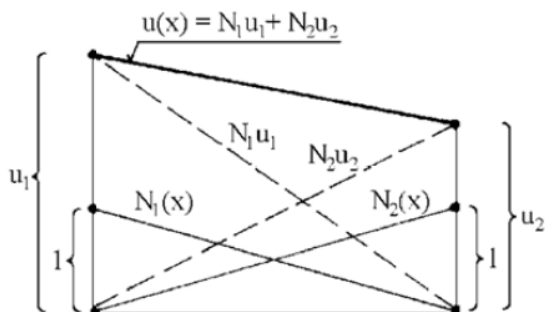
3. METÓDA KONEČNÝCH PRVKOV (MKP)



Obr. 3.2: Prút rozdelený na prvky a uzly [8]



Obr. 3.3: Prvok č.1 [8]



Obr. 3.4: Bázové funkcie prvku č.1 [8]

Tvar bázových funkcií prvku č.1 (obr.3.3):

$$N_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (3.8)$$

Kde x_1, x_2 sú súradnice uzlových bodov a x je súradnica ľubovoľného bodu prvku medzi uzlami 1 a 2. Posuv ľubovoľného bodu je:

$$u(x) = N_1(x) \cdot u_1 + N_2(x) \cdot u_2 \quad (3.9)$$

Celková potenciálna energia je rovná sume príspevkov jednotlivých prvkov (obr.3.2).

$$\Pi = \sum_{i=1}^3 \Pi_i \quad (3.10)$$

Celková potenciálna energia prvku č.1:

$$\Pi_1 = W_1 - P_1 \quad (3.11)$$

Energia napätosti prvku č.1:

$$W_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \sigma \varepsilon S dx \quad (3.12)$$

3.3. ALGORITMUS MKP

Pretvorenie:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d}{dx}(\mathbf{N} \cdot \delta) = \mathbf{B} \cdot \delta \quad (3.13)$$

kde \mathbf{B} je matica tvaru funkcie pretvorenia nad prvkom

$$\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{N}}{dx} = \frac{dN_1}{dx} + \frac{dN_2}{dx} = \frac{-1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{x_2 - x_1}[-1, 1] \quad (3.14)$$

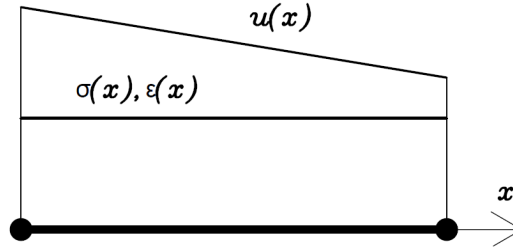
Dĺžka prvku č.1 je $L_p = x_2 - x_1$, teda po úprave vzťahu (3.14):

$$\mathbf{B} = \frac{1}{L_p}[-1, 1] \quad (3.15)$$

Pre napätie platí vzťah z Hookovho zákona, kde po dosadení vzťahu (3.13):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \mathbf{B} \delta = \delta^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot E \quad (3.16)$$

Bázová funkcia N je lineárne závislá na x , zo vzťahu (3.13), (3.15) a (3.16) vyplýva, že \mathbf{B} , ε a σ sú nad prvkom konštantné (obr.3.5).



Obr. 3.5: Priebeh funkcií nad prvkom

Dosadením (3.15) do (3.13) dostávame vzťah pre pretvorenie:

$$\varepsilon = \frac{1}{L_p}[-1, 1] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{u_2 - u_1}{L_p} \quad (3.17)$$

Dosadením (3.13) a (3.16) do (3.11) vyjadríme energiu napätosti prvku č.1 v tvare:

$$W_1 = \frac{1}{2} \delta^T \cdot \left(ES \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx \right) \cdot \delta = \frac{1}{2} \delta^T \cdot \mathbf{k} \cdot \delta \quad (3.18)$$

kde \mathbf{k} je *prvková matica tuhosti*

$$\mathbf{k} = \frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Potenciál vonkajšieho zaťaženia zo vzťahu (3.11) je

$$P_1 = \int_{x_1}^{x_2} u p g S dx \quad (3.20)$$

3. METÓDA KONEČNÝCH PRVKOV (MKP)

Dosadením (3.7) do (3.20) a po úpravách

$$P_1 = \delta^T \cdot \mathbf{f} \quad (3.21)$$

kde \mathbf{f} je prvková matica vonkajšieho zaťaženia, ktorá predstavuje diskretizáciu spojitého zaťaženia.

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} \rho g S L_p \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Prvkami matice \mathbf{f} sú uzlové sily, ktoré sú rovné polovici celkovej objemovej sily, pôsobiacej na prvok. Pri zadání osamelej sily priamo do uzlu, je takáto sila umiestnená na príslušnú pozíciu matice \mathbf{f} .

3.3.1. Celková (globálna) matica tuhosti a zaťaženia

Energia napätosti prvku č.1, vo vzťahu k ostatným prvkom telesa na (obr.3.2) vyjadríme vzťahom:

$$W_1 = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{U} \quad (3.23)$$

kde \mathbf{U} je celková (globálna) matica deformačných parametrov: $\mathbf{U} = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T$. (u_1, u_2, u_3, u_4) sú postupne posuvy jednotlivých uzlov telesa na (obr.3.2). Maticu tuhosti (3.19) je potrebné rozšíriť o toľko riadkov a stĺpcov, koľko pribudlo deformačných parametrov. V tomto prípade sme pridali dva deformačné parametre, resp. posuvy u_3 a u_4 , preto pridáme dva riadky a dva stĺpce. Teda matica tuhosti prvku č.1 vo vzťahu k ostatným prvkom je v tvare:

$$\mathbf{K}_1 = \frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Analogicky vzniká matica tuhosti prvku č.2 \mathbf{K}_2 a prvku č.3 \mathbf{K}_3 :

$$\mathbf{K}_2 = \frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_3 = \frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Celková energia je rovná sume príspevkov jednotlivých prvkov

$$W = \sum_{i=1}^3 W_i = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \cdot (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3) \cdot \mathbf{U} = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} \quad (3.25)$$

kde celková (globálna) matica tuhosti telesa (obr.3.2) je v tvare

$$\mathbf{K} = \frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

3.3. ALGORITMUS MKP

Analogicky získame aj celkovú (globálnu) maticu vonkajšieho zaťaženia \mathbf{F}

$$P = \sum_{i=1}^3 P_i = \mathbf{U}^T \cdot (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3) = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{F} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \rho g S L_p \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

3.3.2. Základná rovnica MKP

Dosadením vzťahu (3.25) a (3.27) do (3.1) získavame tvar pre celkovú potenciálnu energiu, v závislosti na konečnom počte prvkov matice \mathbf{U} :

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{F} \quad (3.29)$$

Použitím Lagrangeovho variačného princípu, resp. vzťahu (3.6) získavame sústavu štyroch lineárnych algebraických rovníc, resp. *základnú rovnicu MKP*:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3.30)$$

v maticovom tvare

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Determinant celkovej (globálnej) matice tuhosti \mathbf{K} je nulový ($\det(\mathbf{K})=0$), z toho vyplýva, že matica \mathbf{K} je singulárna. Ak je matica singulárna, znamená to, že riadky aj stĺpce matice sú lineárne závislé, čiže sústava nemá jednoznačné riešenie. Predpísaním *okrajových podmienok*, dochádza ku eliminácii niektorých riadkov, resp. stĺpcov matice \mathbf{K} . Vhodnou voľbou týchto podmienok, tzn. definovaním minimálne toľkých podmienok, ktoré by zaručovali zamedzenie pohybu telesa ako celku, získavame maticu, ktorá je regulárna, a teda má jednoznačné riešenie. V prípade telesa na (obr.3.2), pri uvažovaní deformácii len v jednom smere, je väzbou jednoznačne určená okrajová podmienka, a síce nulový posuv u_1 . Uvedený predpoklad spôsobí modifikáciu matice deformačných parametrov \mathbf{U} , matice tuhosti \mathbf{K} a matice vonkajšieho zaťaženia \mathbf{F} . Nakoľko je prvý riadok matice \mathbf{U} nulový, bude nulový prvý riadok matice \mathbf{F} aj prvý riadok a stĺpec matice \mathbf{K} . Po takejto úprave dostávame:

$$\mathbf{K} = \frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \frac{1}{2} \rho g S L_p \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Riadky sústavy (3.30) predstavujú rovnice rovnováhy v uzlových bodoch siete [8].

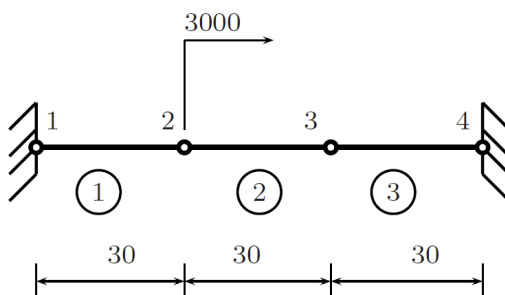
3.3.3. Základné kroky pri riešení problému metódou MKP

V akomkoľvek probléme založenom na MKP, je postup riešenia typický:

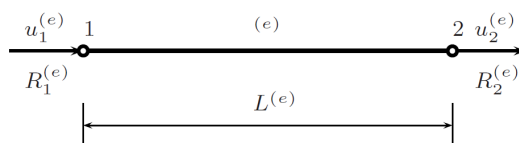
1. Určenie súboru prvkov spojených v styčníku
2. Určenie matice tuhosti \mathbf{K} a vektoru sily \mathbf{f} pre každý prvok
3. Určenie vplyvu každého prvkov na globálny systém $\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}$
4. Modifikovanie globálneho systému zadáním okrajových podmienok
5. Riešenie globálneho systému a získanie globálnej matice posunutia \mathbf{U}
6. Určenie pretvorenia a napätia pre každý prvok [1]

Príklad

Vyššie uvedený postup riešenia aplikujeme na jednoduchom príklade.



Obr. 3.6: Zaväzbený prút zaťažný v uzle 2 [1]



Obr. 3.7: Uvoľnený prvok [1]

$$F = 3000N$$

$$E = 30 \cdot 10^6 \text{MPa}$$

$$S = 1 \text{mm}^2$$

$$L_p = L^{(1)} = L^{(2)} = L^{(3)} = 30 \text{mm}$$

Prvok č.1:

$$\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{U}_1 = \mathbf{F}_1$$

$$\frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^{(1)} \\ R_2^{(1)} \end{bmatrix}$$

3.3. ALGORITMUS MKP

Prvok č.2:

$$\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{U}_2 = \mathbf{F}_2$$

$$\frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^{(2)} \\ R_2^{(2)} \end{bmatrix}$$

Prvok č.3:

$$\mathbf{K}_3 \cdot \mathbf{U}_3 = \mathbf{F}_3$$

$$\frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^{(3)} \\ R_2^{(3)} \end{bmatrix}$$

Vzťah medzi lokálnymi a globálnymi posunutiami:

$$u_1^{(1)} = u_1, \quad u_2^{(1)} = u_2, \quad u_1^{(2)} = u_2, \quad u_2^{(2)} = u_3, \quad u_1^{(3)} = u_3, \quad u_2^{(3)} = u_4$$

Rovnice rovnováhy:

Uzol č.1:

$$\sum_{e=1}^3 R^{(e)} = F_1 \iff R_1^{(1)} = F_1$$

Uzol č.2:

$$\sum_{i=1}^3 R^{(e)} = F \iff R_2^{(1)} + R_1^{(2)} = F$$

Uzol č.3:

$$\sum_{i=1}^3 R^{(e)} = 0 \iff R_2^{(2)} + R_1^{(3)} = 0$$

Uzol č.4:

$$\sum_{e=1}^3 R^{(e)} = F_4 \iff R_2^{(3)} = F_4$$

Po roznásobení a dosadení:

Prvok č.1:

$$\frac{ES}{L_p} u_1^{(1)} - \frac{ES}{L_p} u_2^{(1)} = \frac{ES}{L_p} u_1 - \frac{ES}{L_p} u_2 = R_1^{(1)}$$

$$-\frac{ES}{L_p} u_1^{(1)} + \frac{ES}{L_p} u_2^{(1)} = -\frac{ES}{L_p} u_1 + \frac{ES}{L_p} u_2 = R_2^{(1)}$$

Prvok č.2:

$$\frac{ES}{L_p} u_1^{(2)} - \frac{ES}{L_p} u_2^{(2)} = \frac{ES}{L_p} u_2 - \frac{ES}{L_p} u_3 = R_1^{(2)}$$

$$-\frac{ES}{L_p} u_1^{(2)} + \frac{ES}{L_p} u_2^{(2)} = -\frac{ES}{L_p} u_2 + \frac{ES}{L_p} u_3 = R_2^{(2)}$$

Prvok č.3:

$$\frac{ES}{L_p} u_1^{(3)} - \frac{ES}{L_p} u_2^{(3)} = \frac{ES}{L_p} u_3 - \frac{ES}{L_p} u_4 = R_1^{(3)}$$

$$-\frac{ES}{L_p} u_1^{(3)} + \frac{ES}{L_p} u_2^{(3)} = -\frac{ES}{L_p} u_3 + \frac{ES}{L_p} u_4 = R_2^{(3)}$$

3. METÓDA KONEČNÝCH PRVKOV (MKP)

Po dosadení do rovníc rovnováhy:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{ES}{L_p}u_1 - \frac{ES}{L_p}u_2 \\ F &= -\frac{ES}{L_p}u_1 + \frac{2ES}{L_p}u_2 - \frac{ES}{L_p}u_3 \\ 0 &= -\frac{ES}{L_p}u_2 + \frac{2ES}{L_p}u_3 - \frac{ES}{L_p}u_4 \\ F_4 &= -\frac{ES}{L_p}u_3 + \frac{ES}{L_p}u_4 \end{aligned}$$

Vyššie uvedené vzťahy môžeme zapísať v maticovom tvare:

$$\frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F \\ 0 \\ F_4 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Uvažujeme okrajové podmienky $u_1 = u_4 = 0$, preto môžeme vynulovať príslušné riadky a stĺpce v (3.32) a vypočítať globálne posunutia u_2 a u_3 :

$$\frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{aligned} u_2 &= 0,002mm \\ u_3 &= 0,001mm \end{aligned}$$

Dosadením výsledných globálnych posunutí do (3.32) určíme reakčné sily vo väzbách:

$$\frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F \\ 0 \\ F_4 \end{bmatrix} \implies \begin{aligned} F_1 &= -2000N \\ F_4 &= -1000N \end{aligned}$$

Výsledky sú záporné, to znamená, že orientácia síl vo väzbách je opačná, ako nami zvolená.

3.4. Prútové prvky

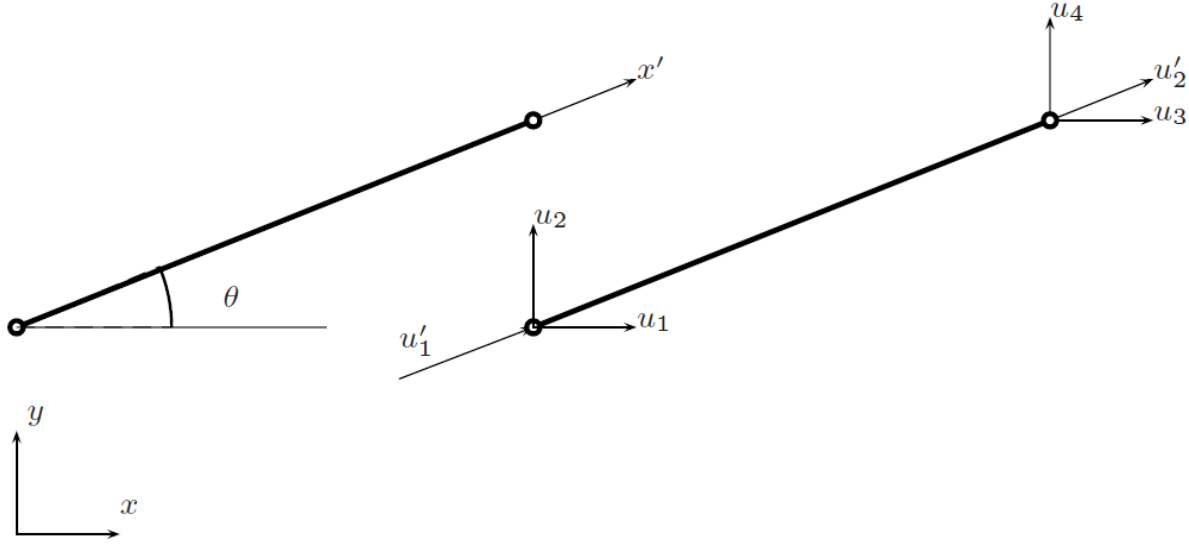
Nakoľko vzťahy MKP sú definované za predpokladov lineárnej pružnosti, charakterizovanou Youngovým modulom pružnosti, je potrebné, pri hodnotení výsledkov získaných metódou konečných prvkov, dôkladne hodnotiť splnenie, resp. nesplnenie týchto predpokladov [8].

3.4.1. 2D prúty

Lokálny súradný systém $x' - y'$ definuje lokálne posunutia u'_1, u'_2 . Element má v lokálnom súradnom systéme dva stupne voľnosti.

$$\mathbf{U}' = [u'_1 \quad u'_2]^T \quad (3.33)$$

3.4. PRÚTOVÉ PRVKY



Obr. 3.8: Prútový prvok v 2D: lokálny a globálny súradný systém [1]

Globálny súradný systém $x - y$ definuje posunutia u_1, u_2, u_3, u_4 . Element má v globálnom súradnom systéme štyri stupne voľnosti.

$$\mathbf{U} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4]^T \quad (3.34)$$

[1]

Počet deformačných parametrov je rozšírený o posuvy v smere y , aby bol umožnený obecný posuv uzlových bodov v rovine xy . Pretože prvok má nenulovú tuhosť len v smere x , je matica tuhosti v lokálnom súradnom systéme formálne rozšírená o nulové riadky a stĺpce.

$$\mathbf{K} = \frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

[8]

Vzťah medzi lokálnym a globálnym súradným systémom je daný geometrickými vzťahmi, vyjadrenými pomocou goniometrických funkcií.

$$u'_1 = u_1 \cos(\theta) + u_2 \sin(\theta) \quad (3.36)$$

$$u'_2 = u_3 \cos(\theta) + u_4 \sin(\theta) \quad (3.37)$$

kde θ je uhol medzi lokálnou osou x' a globálnou osou x . V maticovom tvare:

$$\mathbf{U}' = \mathbf{L}\mathbf{U} \quad (3.38)$$

kde L je matica

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

3. METÓDA KONEČNÝCH PRVKOV (MKP)

kde l, m sú definované ako:

$$l = \cos(\theta) = \frac{x_2 - x_1}{L_p} \quad (3.40)$$

$$m = \sin(\theta) = \frac{y_2 - y_1}{L_p} \quad (3.41)$$

pričom L_p je dĺžka elementu:

$$L_p = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (3.42)$$

3.4.2. Matica tuhosti pre 2D prút

V lokálnom súradnom systéme je matica tuhosti pre 2D prút definovaná podobne, ako pre jednorozmernú úlohu:

$$\mathbf{K}' = \frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Energia napätosti v lokálnom súradnom systéme:

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{U}'^T \mathbf{K}' \mathbf{U}' \quad (3.44)$$

Po dosadení (3.38) do (3.44) dostaneme:

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T [\mathbf{L}^T \mathbf{K}' \mathbf{L}] \mathbf{U} \quad (3.45)$$

kde globálna matica tuhosti je definovaná ako:

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}^T \mathbf{K}' \mathbf{L} \quad (3.46)$$

$$\mathbf{K} = \frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} l & 0 \\ m & 0 \\ 0 & l \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

3.4.3. Napätie v 2D prútoch

V lokálnom súradnom systéme sú napätia definované ako $\sigma = E\varepsilon$. Berúc do úvahy definíciu relatívneho predĺženia elementu, dostávame:

$$\sigma = E \frac{u'_2 - u'_1}{L_p} = \frac{E}{L_p} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} = \frac{E}{L_p} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{U}' \quad (3.48)$$

Transformáciou z lokálneho do globálneho súradného systému:

$$\sigma = \frac{E}{L_p} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{L} \mathbf{U} = \frac{E}{L_p} \begin{bmatrix} -l & -m & l & m \end{bmatrix} \mathbf{U} \quad (3.49)$$

3.4. PRÚTOVÉ PRVKY

3.4.4. Osovo zaťažný prút v 3D

Počet deformačných parametrov je rozšírený o posuvy v smere z , aby bol umožnený obecný posuv uzlových bodov nie len v rovine xy , ale aj v rovine xz a yz . Prvok má takto šesť deformačných parametrov a matica tuhosti v lokálnom súradnom systéme má tvar:

$$\mathbf{K} = \frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

[8]

Globálna matica tuhosti K je potom definovaná ako:

$$\mathbf{K} = \frac{ES}{L_p} \begin{bmatrix} C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z & -C_x^2 & -C_x C_y & -C_x C_z \\ & C_y^2 & C_y C_z & -C_x C_y & -C_y^2 & -C_y C_z \\ & & C_z^2 & -C_x C_z & -C_y C_z & -C_z^2 \\ & & & C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z \\ & & & & C_y^2 & C_y C_z \\ & & & & & C_z^2 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

symetricke

kde C_x, C_y, C_z :

$$C_x = \frac{x_2 - x_1}{L_p}; \quad C_y = \frac{y_2 - y_1}{L_p}; \quad C_z = \frac{z_2 - z_1}{L_p}$$

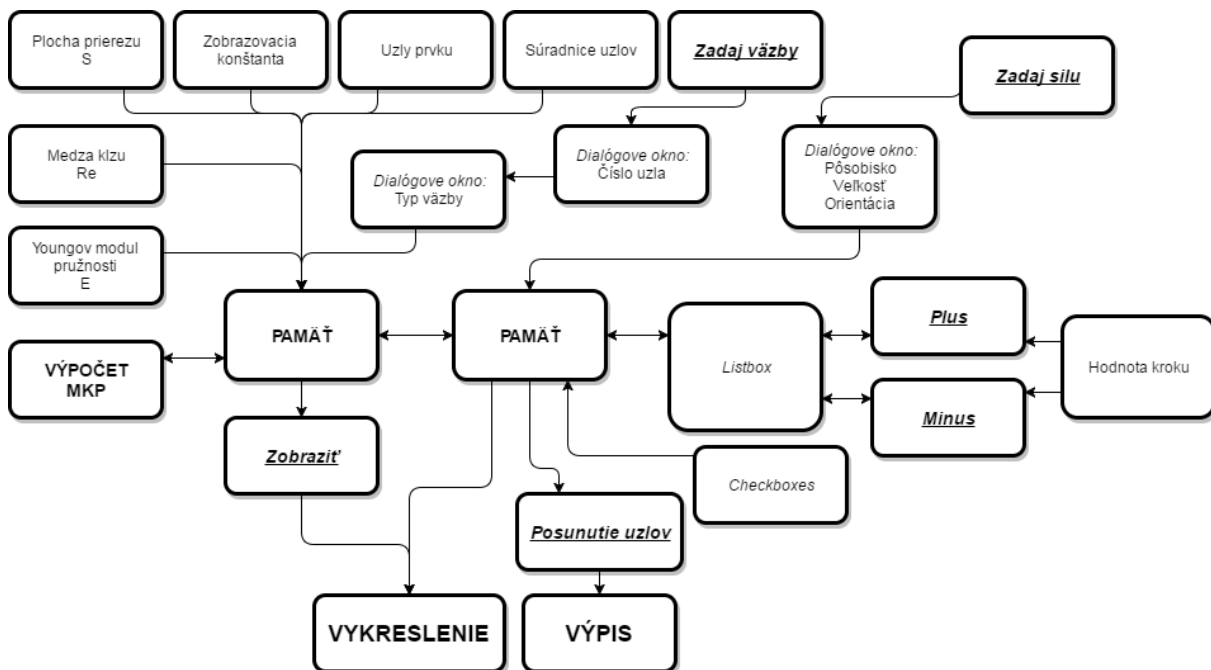
Podobne sa transformuje aj napätie:

$$\sigma = \frac{E}{L_p} [-C_x \quad -C_y \quad -C_z \quad C_x \quad C_y \quad C_z] \quad (3.52)$$

[1]

4. Prutovka_solver

Prutovka_solver je aplikácia, ktorá slúži na analýzu 2D prútových sústav. Je vytvorená v programe MATLAB. Aplikácia obsahuje viacero programov, ktoré medzi sebou zdieľajú dáta a výsledky matematických operácií, založených na metóde konečných prvkov. Centrálnou časťou aplikácie *Prutovka_solver* je MATLAB GUI (Graphical User Interface) (obr.4.2). Ten obsahuje polia určené na zadávanie vstupných hodnôt, tlačidlá, pomocou ktorých sa spúšťajú dialógové okná, alebo dáva pokyn k vykresleniu, prípadne k vypísaniu výsledkov a pod. Súčasťou aplikácie sú prepínacie okná, ktorými sa definuje to, aké riešenie má, resp. nemá byť vypísané na obrazovke, posuvný zoznam a pole na vizualizáciu výsledkov. Na (obr.4.1) je grafická interpretácia toho, akým spôsobom sa zadávajú vstupné hodnoty, resp. vykresľujú výsledky výpočtov.



Obr. 4.1: Vývojový diagram aplikácie Prutovka_solver

4.1. Popis užívateľského rozhrania Prutovka_solver

Po spustení aplikácie sa otvorí okno (užívateľské rozhranie) (obr.4.2), ktoré obsahuje tri základné časti:

- časť určená na zadávanie vstupných hodnôt (oblasti: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10),
- časť určená na definovanie spôsobu vykreslenia výsledkov (oblasť 11),
- časť určená na vykreslenie výsledkov (oblasť 12).

4.1.1. Popis oblastí užívateľského rozhrania Prutovka_solver

Oblasť 1: editovací riadok, do ktorého sa zapisuje číselná hodnota Youngovho modulu pružnosti v ťahu E v MPa.

4.1. POPIS UŽÍVATEĽSKÉHO ROZHRAINIA PRUTOVKA_SOLVER



Obr. 4.2: Uživateľské rozhranie aplikácie Prutovka_solver

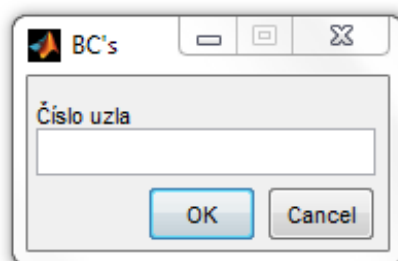
Oblasť 2: editovací riadok, na zápis číselnej hodnoty medze klzu Re v MPa. Tá je potrebná na výpočet bezpečnosti k MSP, resp. pri kontrole straty vzpernej stability stlačovaných prútov.

Oblasť 3: editovací riadok, na zápis číselnej hodnoty plochy prierezu prútov.

Oblasť 4: editovací riadok, na zápis číselnej hodnoty zobrazovacej konštanty. Pretože sú deformácie a posuvy veľmi malé, je vhodné ich násobiť príslušným koeficientom, resp. zobrazovacou konštantou, tak, aby pri vykresľovaní boli viditeľné, v porovnaní s nedeformovaným tvarom.

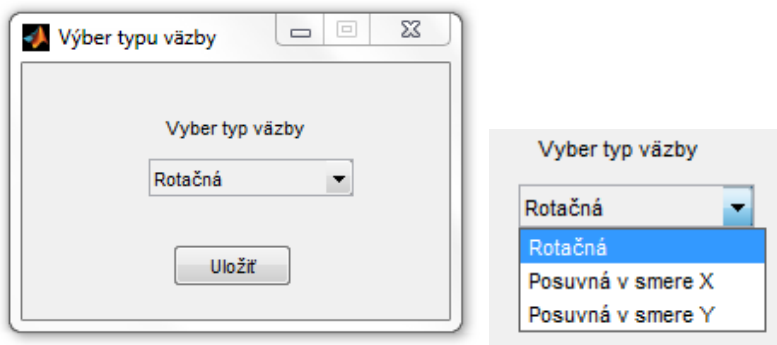
Oblasť 5: editovací riadok, určený na zadanie prútov. Každý prút je definovaný dvomi uzlami, čo sa zapisuje do matice, ktorá má dva stĺpce (dva uzly jedného prútu) a počet riadkov matice je rovný počtu prútov.

Oblasť 6: editovací riadok, do ktorého sa zapisujú súradnice uzlov. Nakoľko je aplikácia určená na riešenie 2D problémov, je každý uzol prútovej sústavy určený dvomi súradnicami x a y . Tie sa zapisujú do matice, ktorá je, podobne ako matica zadaných prútov, tvorená dvomi stĺpcami (súradnice x, y uzla) a počet riadkov matice je rovný počtu uzlov. Prvky matice súradníc uzlov je vhodné zadávať v poradí, v akom sú uzly očíslované.



Obr. 4.3: Dialógové okno BC's

Oblasť 7: tlačidlo, spúšťajúce dialógové okno *BC's* (obr.4.3), do ktorého sa zapisuje číslo uzla. Po zadaní čísla uzla a stlačení tlačidla *OK*, sa otvorí dialógové okno *Výber typu väzby*,

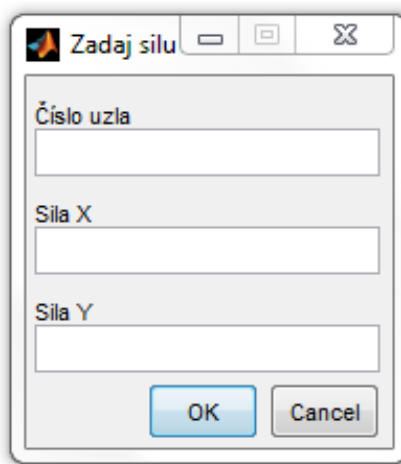


Obr. 4.4: Dialógové okno na Výber typu väzby, pop-up menu

v ktorom rozkliknutím *pop-up menu* zobrazíme ponuku typov väzieb (obr.4.4). Stlačením tlačidla *Uložiť* sa daná väzba uloží do pamäte. Celý postup je možné opakovať viackrát.

Oblasť 8: tlačidlo, ktorým sa udelí príkaz na vykreslenie zadanej prútovej sústavy, prípadne aj väzieb.

Oblasť 9: posuvný zoznam, v ktorom sa zobrazujú nami zadané vonkajšie sily. Zoznam umožňuje aj výber, čo sa využíva pri zmene zaťaženia prútovej sústavy.

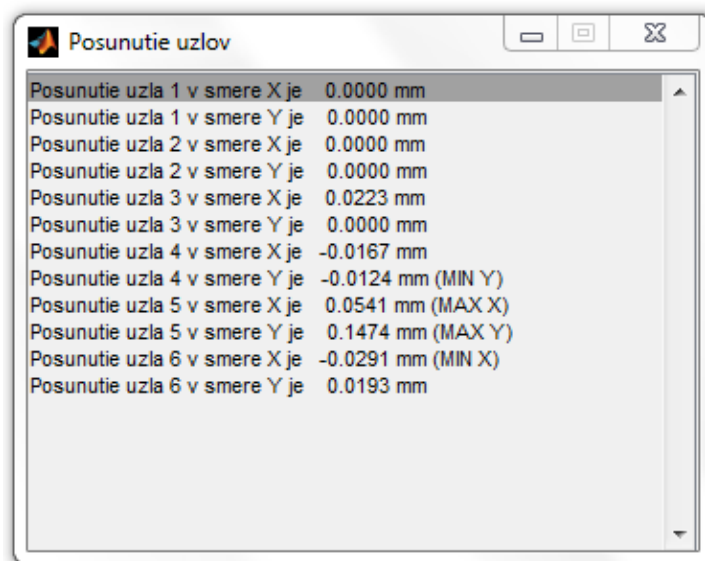


Obr. 4.5: Dialógové okno Zadaj silu

Oblasť 10: slúži na zadávanie vonkajšieho zaťaženia. Stlačením tlačidla *Zadaj silu*, sa otvorí dialógové okno s možnosťou úplného zadania zaťaženia (obr.4.5). Vyplnením editovacích riadkov tohto dialógového okna, sa takto zadaná sila uloží do pamäte, vypíše v posuvnom zozname (Oblasť 9) a vstúpi do výpočtu, čo sa prejaví na zmene deformácie danej sústavy, ktorá sa hneď vykreslí. V prípade zadania niektorej zo zložiek sily nulovej, sa daná zložka v posuvnom zozname nezobrazí. Výberom niektorej zo zadaných síl z posuvného zoznamu, je možné, tlačidlami *plus* a *minus*, meniť veľkosť sily, ktorej výsledok pôsobenia na prútovú sústavu sa paralelne zobrazí vo vykresľovacej oblasti aplikácie. Do editovacieho riadku *hodnota kroku* sa zadá číselná hodnota kroku, ktorým sa veľkosť vybranej sily bude meniť.

Oblasť 11: obsahuje prepínacie okná, pomocou ktorých sa definuje to, čo má, resp. nemá byť vypísané vo vykresľovacej oblasti aplikácie, ako je uvedené v úvode kapitoly. Prvé tri prepínacie okná súvisia s prútmi namáhanými na ťah, nasleduje prepínacie okno *Reakčné sily vo väzbách* a ďalšia skupina troch prepínacích okien, ktoré, naopak, súvisia s prútmi namáhanými na tlak. Označením prepínacieho okna *Ťah [MPa]*, resp. *Tlak [MPa]*

4.1. POPIS UŽÍVATEĽSKÉHO ROZHRAVIA PRUTOVKA_SOLVER

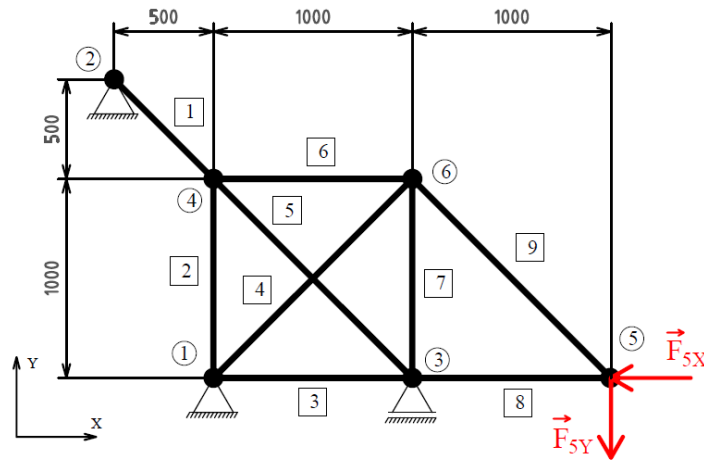


Obr. 4.6: Dialógové okno Posunutie uzlov

sa hodnota normálového napätia v prúte zobrazí vo vykresľovacej oblasti v prvej polovici daného prútu. Označením prepínacieho okna *Ťah [N]*, resp. *Tlak [N]* sa prepínacie okná *Ťah [MPa]* a *Tlak [MPa]* odznačia, a vo vykresľovacej oblasti aplikácie sa hodnoty v prvej polovici prútu prepíšu na hodnoty normálovej sily v danom prúte, a naopak. Prepínacie okná *Deformácia [mm]* umožňujú vypísanie zmeny dĺžky každého z prútov. Príslušná hodnota sa zobrazí v druhej polovici daného prúta. Podobne ako v prípade prepínacích okien *Ťah* a *Tlak*, to funguje aj s prepínacím oknom *Bezpečnosť* a *Deformácia*. Nakoľko sa údaje súvisiace s označením, resp. odznačením prepínacích okien ukladajú do pamäte (obr.4.1), ich vplyv sa prejavuje vo vykreslení okamžite, rovnako tak aj pri zmene zaťaženia. Stlačením tlačidla *Posunutie uzlov* sa zobrazí dialógové okno obsahujúce výpis posunutí jednotlivých uzlov v smere x a y (obr.4.6).

Oblasť 12: vykresľovacia oblasť. Tu prebieha vizualizácia výsledkov pri súčasnej zmene vstupných parametrov. Na začiatku je po stlačení tlačidla *Zobraziť* nami zadaná prútová sústava zobrazená čiarami čiernej farby. Kĺby sú zobrazené čiernymi bodmi. Po zadaní okrajových podmienok (väzieb), sú tieto väzby, opätovným stlačením tlačidla *Zobraziť*, zobrazené preddefinovaným spôsobom. Po zadaní vonkajšieho zaťaženia, je jeho vplyv na sústavu okamžite zobrazený. Vykreslenie zobrazuje prútovú sústavu v nedeformovanom stave, čo je zobrazené prerušovanou čiarou a bodmi sivej farby, a deformovaný tvar sústavy. Prúty namáhané na ťah sú vykreslené čiarou červenej farby, rovnako tak aj výsledky súvisiace s týmito prútmi sú vypísané červenou farbou na sivom pozadí. Prúty namáhané, naopak, na tlak sú vykreslené čiarou modrej farby, podobne aj výsledky sú modrej farby, a prúty, ktoré nie sú zaťažené sa vykresľujú zelenou farbou. V prípade vypísania bezpečnosti, ak je bezpečnosť väčšia ako 1, je výpis zelenej farby ($K_{msp} = 2, K_{vzper} = 1.6$), ale ak je menšia ako 1, je výpis červenej farby, obohatený o ! ($!K_{msp} = 0.9, !K_{vzper} = 0.93$). Vykreslenie reakčných síl je pomocou šípiek červenej alebo modrej farby a číselnou informáciou o veľkosti sily.

5. 2D Prúťová sústava



Obr. 5.1: 2D Prúťová sústava

Zadanie: $E = 210000 \text{ MPa}$

$R_e = 250 \text{ MPa}$

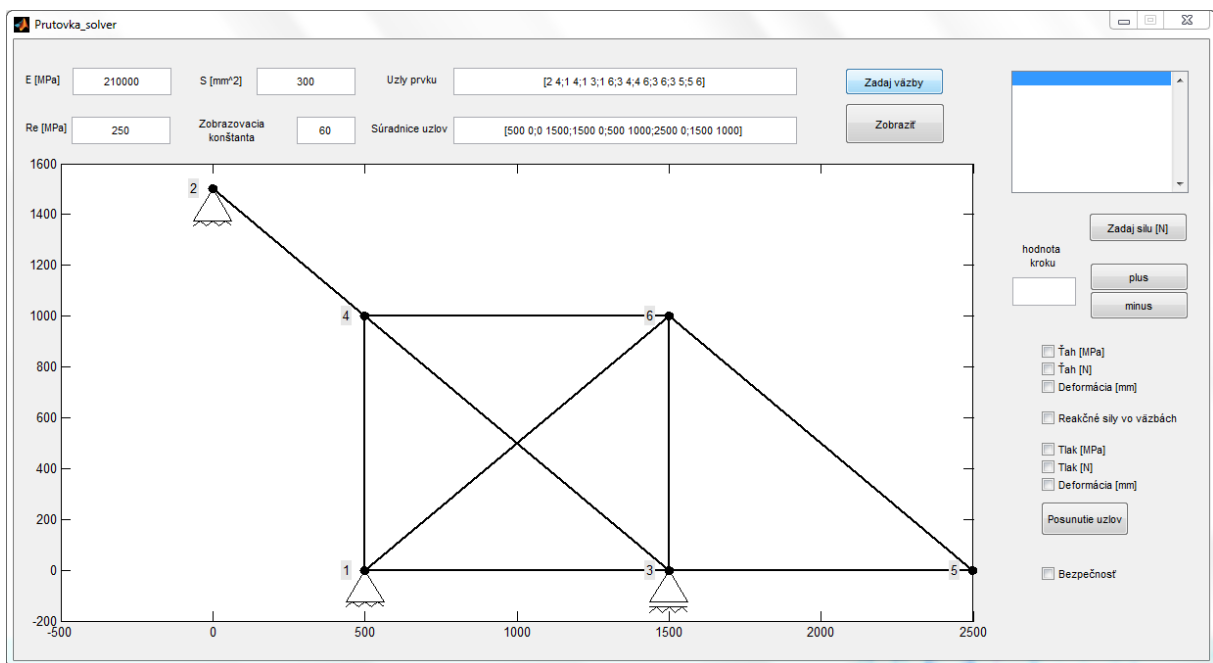
$S = 300 \text{ mm}^2$

$F_{5X} = 2000 \text{ N}$

$F_{5Y} = 10000 \text{ N}$

5.1. Riešenie pomocou aplikácie Prutovka_solver

5.1.1. Vykreslenie zadania

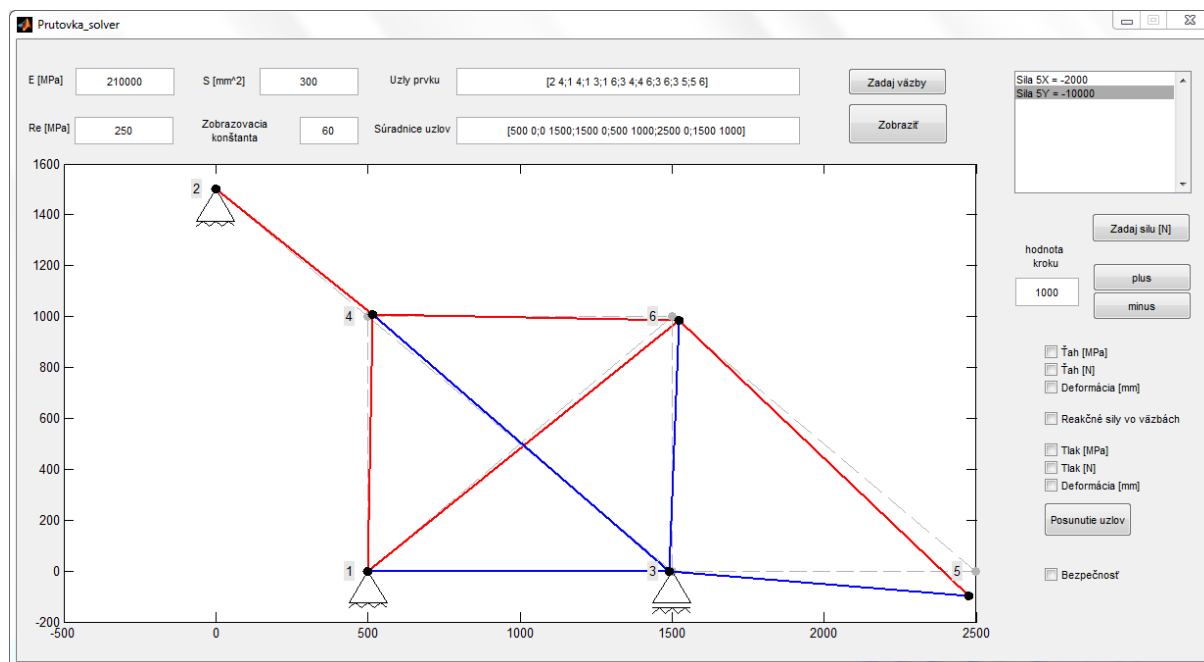


Obr. 5.2: Vykreslenie prúťovej sústavy a väzieb

5.1. RIEŠENIE POMOCOU APLIKÁCIE PRUTOVKA_SOLVER

Na úvod je potrebné zadať vstupné údaje spôsobom uvedeným v kapitole 4. Matica *uzly prvku* sa vytvára na základe zadania. Každý riadok matice je jeden prút sústavy, pričom sú prúty charakterizované dvomi uzlami (viz. kap. 4). Tzn., že prvý riadok matice je prút číslo jeden, charakterizovaný uzlami 2 a 4, druhý riadok je prút číslo dva, s uzlami 1 a 4. Analogicky pre všetkých deväť prútov takto vytvoríme maticu *uzly prvku* v tvare: [2 4; 1 4; 1 3; 1 6; 3 4; 4 6; 3 6; 3 5; 5 6] (“;” znamená presun kurzora do nového riadku). Matica *súradnice uzlov* sa vytvára podľa zadania, pričom sa zachováva poradie uzlov podľa číslovania na (obr.5.1). Tzn., že prvý riadok matice sú súradnice uzla s číslom jeden $[x_1 \ y_1]$, resp. [500 0], druhý riadok matice sú súradnice uzla s číslom dva $[x_2 \ y_2]$, resp. [0 1500]. Analogicky pre všetkých šesť uzlov vytvoríme maticu *súradnice uzlov* v tvare: [500 0; 0 1500; 1500 0; 500 1000; 2500 0; 1500 1000] Pomocou tlačidla *Zadaj väzby* definujeme okrajové podmienky spôsobom uvedeným v kapitole 4. Stlačením tlačidla *Zobrazíť* sa zobrazí zaväzbená prútová sústava (obr.5.2).

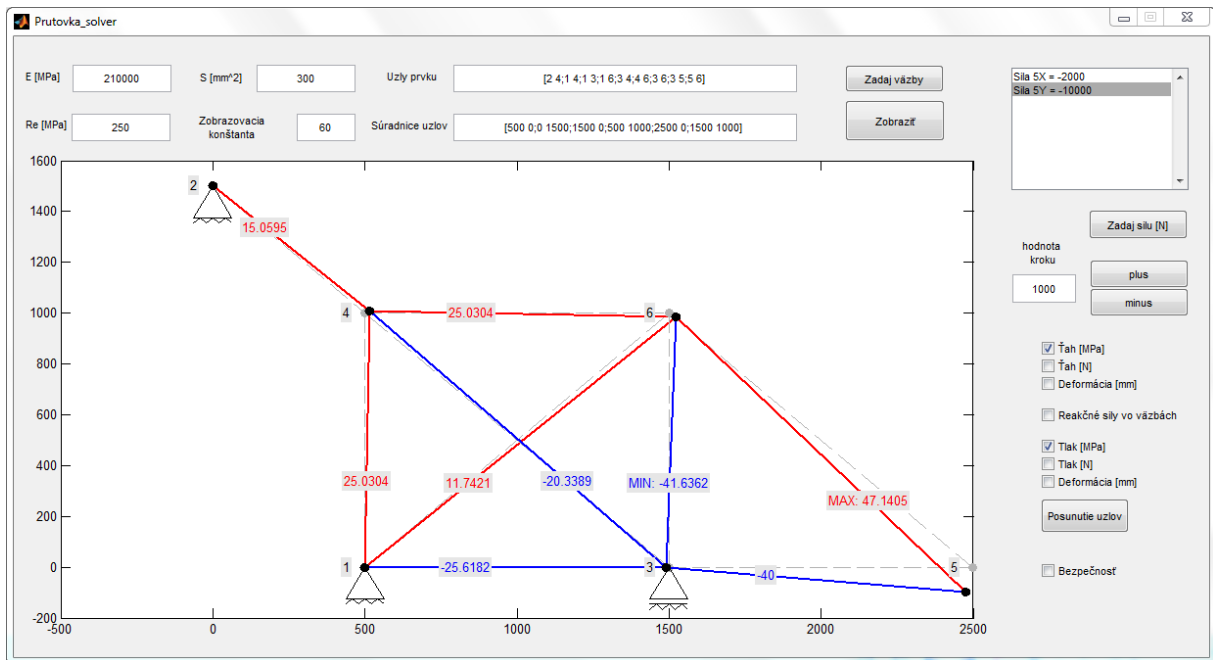
5.1.2. Zadanie vonkajšieho zaťaženia



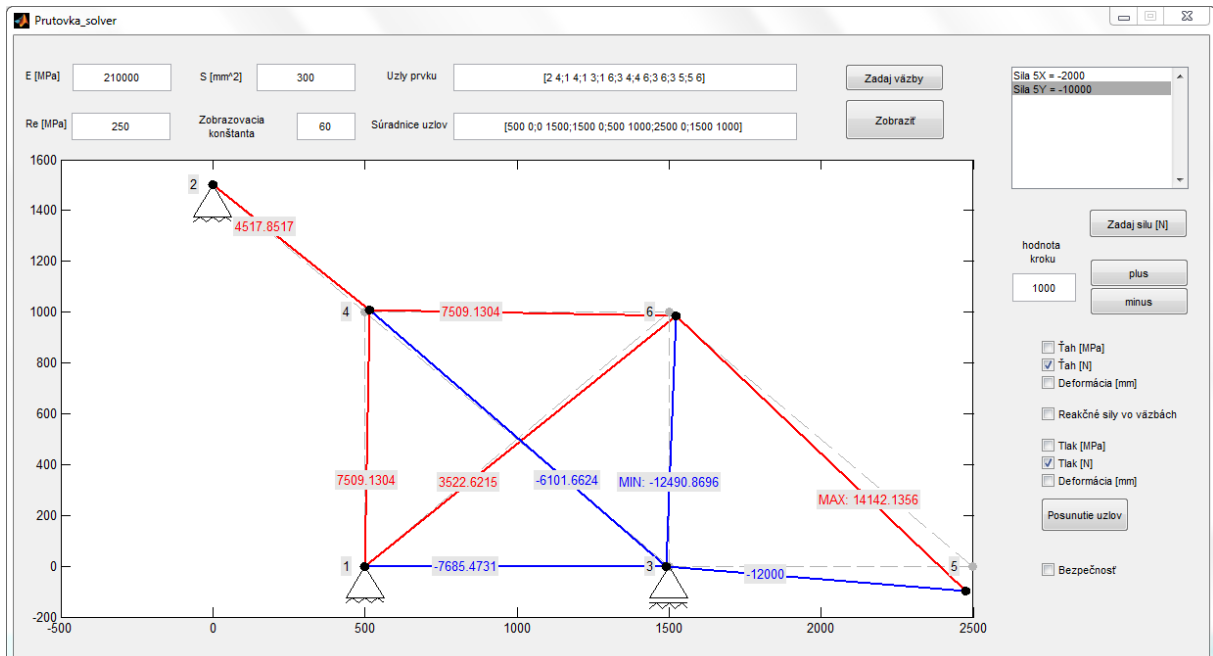
Obr. 5.3: Deformácia prútovej sústavy zaťaženej vonkajšou silou

Pomocou tlačidla *Zadaj silu*, spôsobom uvedeným v kapitole 4, sa definuje vonkajšie silové pôsobenie. Vo vykresľovacej oblasti aplikácie *Prutovka_solver* sa zobrazí deformovaný aj nedeformovaný tvar sústavy, pričom sú prúty farebne odlišené, podľa spôsobu namáhania (červená farba - ťah, modrá farba - tlak, zelená farba - nezaťažенý stav) (obr.5.3).

5.1.3. Získané výstupy

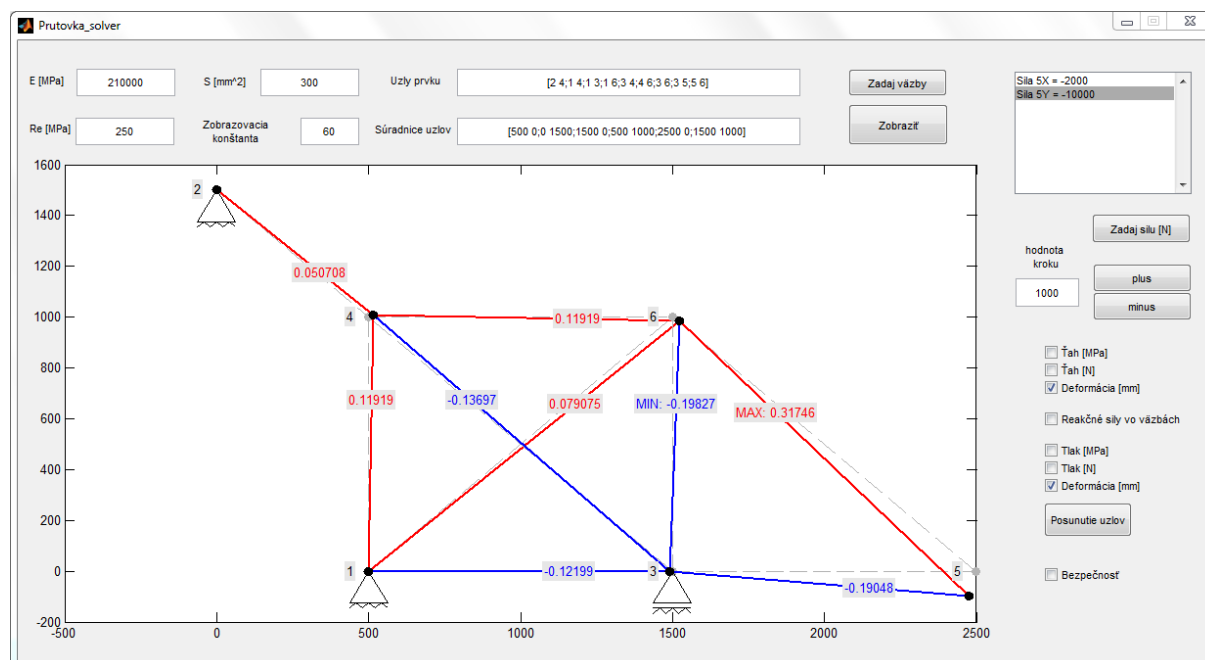


Obr. 5.4: Napätie v prútoch

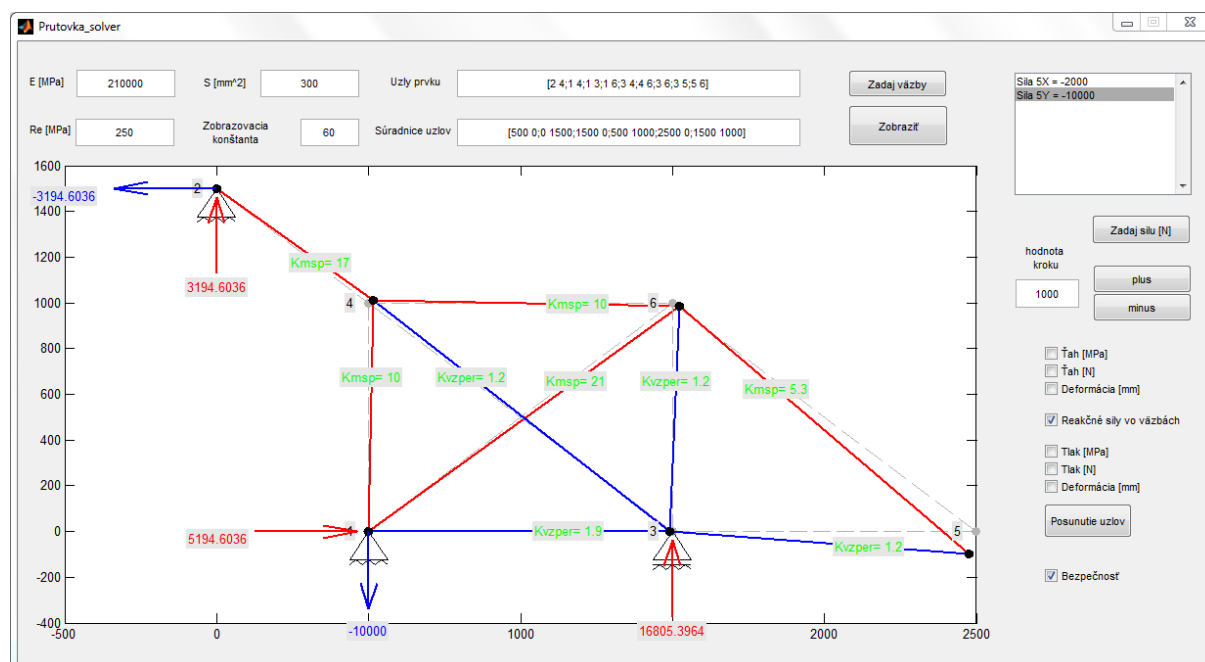


Obr. 5.5: Osová sila v prútoch

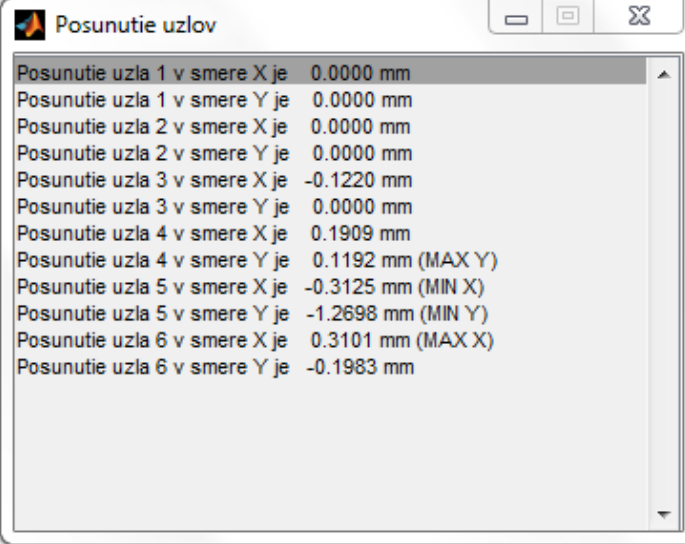
5.1. RIEŠENIE POMOCOU APLIKÁCIE PRUTOVKA_SOLVER



Obr. 5.6: Deformácia prútov



Obr. 5.7: Reakčné sily vo väzbách a bezpečnosť



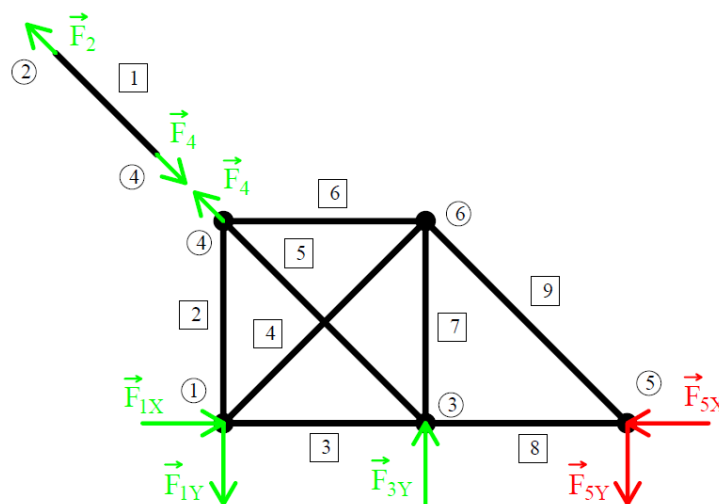
Node	Direction	Displacement (mm)
1	x	0.0000
1	y	0.0000
2	x	0.0000
2	y	0.0000
3	x	-0.1220
3	y	0.0000
4	x	0.1909
4	y	0.1192 (MAX Y)
5	x	-0.3125 (MIN X)
5	y	-1.2698 (MIN Y)
6	x	0.3101 (MAX X)
6	y	-0.1983

Obr. 5.8: Posunutie uzlov v smere osi x a y

5.2. Analytické riešenie

Jedná sa o sústavu 9 priamych prútov. Prúty 2 až 9 sú na oboch koncoch viazané aspoň k jednému prútu, čo neplatí o prúte číslo 1, ktorý takto nie je súčasťou prútovej sústavy. Prútová sústava je ako celok viazaná k základnému telesu a k prútu číslo 1, ktorý je v bode 2 viazaný k základnému telesu rotačnou väzbou. Väzby medzi prútmi 2 až 9 sú rotačné kinematické dvojice. Zaťažujúce sily F_{5X} a F_{5Y} pôsobia v uzle 5.

5.2.1. Úplné uvoľnenie prútovej sústavy



Obr. 5.9: Úplné uvoľnenie

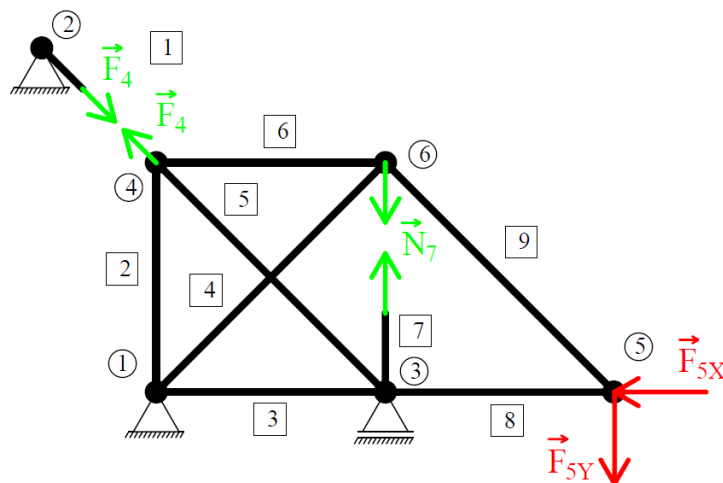
5.2. ANALYTICKÉ RIEŠENIE

Statický rozbor:

$$\begin{aligned}\mu &= 5, \nu = 3 + 1 \\ s_{ex} &= \mu_{ex} - \nu = 5 - (3 + 1) = 1 \\ s_{in} &= p - (2k - 3) = 8 - (2 \cdot 5 - 3) = 1\end{aligned}$$

Zo statického rozboru vyplýva, že daná prútová sústava je vonkajšie aj vnútorne 1-krát staticky neurčitá, preto je nutné čiastočné uvoľnenie na zostavenie deformačných podmienok.

5.2.2. Čiastočné uvoľnenie prútovej sústavy



Obr. 5.10: Čiastočné uvoľnenie

Sústavu uvoľníme tak, aby sa stala:

- vonkajšie staticky určitou: Uvoľníme prút 1, prostredníctvom ktorého je prútová sústava viazaná k základnému telesu a vyjadríme deformačnú podmienku, že posuv prútovej sústavy ako celku v uzle 4 v smere sily F_4 je rovný skrátaniu, resp. predĺženiu prútu 1.
- vnútorne staticky určitou: Uvoľníme napr. prút 7 a zostavíme väzbovú deformačnú podmienku v mieste uvoľnenia prútu, vyjadrujúcu vzájomný posuv rozpojených bodov.

Deformačné podmienky

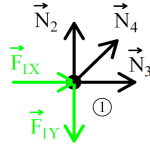
$$\frac{\partial W^{(1)}}{\partial F_4} = -\frac{\partial W^{(2)}}{\partial F_4} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial W^{(1)}}{\partial N_7} = 0 \quad (5.2)$$

Sily v prútoch

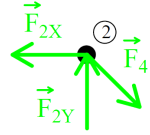
Sily v prútoch určíme postupnou uzlovou metódou. Vyjadrujeme ich vo funkčnej závislosti na silách, ktoré sú zavedené do čiastočne uvoľnených väzieb (\vec{F}_4, \vec{N}_7).

Vnútročné rovnice rovnováhy



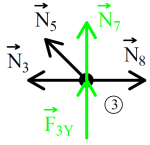
$$\bullet \sum F_X = 0 : F_{1X} + N_3 + N_4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\bullet \sum F_Y = 0 : N_2 + N_4 \frac{\sqrt{2}}{2} - F_{1Y} = 0$$



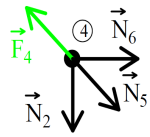
$$\bullet \sum F_X = 0 : F_4 \frac{\sqrt{2}}{2} - F_{2X} = 0$$

$$\bullet \sum F_Y = 0 : F_{2Y} - F_4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$



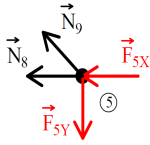
$$\bullet \sum F_X = 0 : N_8 - N_3 - N_5 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\bullet \sum F_Y = 0 : F_{3Y} + N_7 + N_5 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$



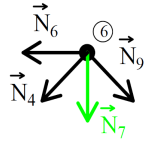
$$\bullet \sum F_X = 0 : N_6 + N_5 \frac{\sqrt{2}}{2} - F_4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\bullet \sum F_Y = 0 : F_4 \frac{\sqrt{2}}{2} - N_2 - N_5 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$



$$\bullet \sum F_X = 0 : -F_{5X} - N_8 - N_9 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\bullet \sum F_Y = 0 : -F_{5Y} + N_9 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$



$$\bullet \sum F_X = 0 : -N_6 - N_4 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_9 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\bullet \sum F_Y = 0 : -N_7 - N_4 \frac{\sqrt{2}}{2} - N_9 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\textcircled{5} \Rightarrow N_9 = \sqrt{2}F_{5Y}$$

$$\Rightarrow N_8 = -F_{5X} - F_{5Y}$$

$$\textcircled{6} \Rightarrow N_4 = -\sqrt{2}N_7 - \sqrt{2}F_{5Y}$$

$$\Rightarrow N_6 = N_7 + 2F_{5Y}$$

$$\textcircled{4} \Rightarrow N_5 = -\sqrt{2}(N_7 + 2F_{5Y}) + F_4$$

$$\Rightarrow N_2 = N_7 + 2F_{5Y}$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow N_3 = -F_{5X} - \frac{\sqrt{2}}{2}F_4 + N_7 + F_{5Y}$$

$$N_1 = F_4; \quad N_7 = N_7; \quad F_4 = F_4$$

5.2. ANALYTICKÉ RIEŠENIE

Výpočet síl v prútoch pomocou deformačných podmienok

Deformačnú podmienku (5.1) môžeme prepísať do tvaru:

$$\sum_{i=2}^9 \frac{N_i l_i}{ES_i} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_4} = -\frac{N_1 l_1}{ES_1} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial F_4} \quad (5.3)$$

Podobne prepíšeme podmienku (5.2) do tvaru:

$$\sum_{i=2}^9 \frac{N_i l_i}{ES_i} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial N_7} = 0 \quad (5.4)$$

Po dosadení a úprave rovníc (5.3) a (5.4) dostávame sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (\frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) & (-\frac{\sqrt{2}}{2} - 2) \\ (-\frac{\sqrt{2}}{2} - 2) & (4 + 4\sqrt{2}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_4 \\ N_7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} F_{5X} - (-4 - \frac{\sqrt{2}}{2}) F_{5Y} \\ F_{5X} - (6\sqrt{2} + 5) F_{5Y} \end{bmatrix} \\ \implies F_4 &= 4517,8517N \\ \implies N_7 &= -12490,8696N \end{aligned} \quad (5.5)$$

Dosadením do vzťahov získaných z podmienok statickej rovnováhy vypočítame zvyšné sily v prútoch ($N_1 \dots N_9$).

Napätia a dĺžkové pretvorenie prútov

Pri výpočte napätí sa vychádza z definície napätia, ako veľkosti sily na jednotku plochy, teda pre jednotlivé napätia v prútoch platí: $\sigma_i = \frac{N_i}{S}$

Pre výpočet dĺžkového pretvorenia použijeme vyjadrenie Hookovho zákona, z ktorého, po úprave dostávame vzťah pre zmenu dĺžky jednotlivých prútov: $\Delta l_i = \frac{\sigma_i l_{oi}}{E}$

Vonkajšie rovnice rovnováhy

$$\begin{aligned} \sum F_X = 0 : & -F_4 \frac{\sqrt{2}}{2} + F_{1X} - F_{5X} = 0 \\ \sum F_Y = 0 : & F_4 \frac{\sqrt{2}}{2} + F_{3Y} - F_{1Y} - F_{5Y} = 0 \\ \sum M_{\textcircled{1}} = 0 : & F_4 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1) + F_{3Y} \cdot (1) - F_{5Y} \cdot (2) = 0 \end{aligned}$$

Reakčné sily vo väzbách

Dosadením vypočítanej veľkosti sily F_4 do vyjadrení vonkajších rovníc rovnováhy, vypočítame neznáme reakčné sily vo väzbách (F_{1X} , F_{1Y} , F_{2X} , F_{2Y} , F_{3Y}).

Posunutie uzla č.5

Posunutie ktoréhokoľvek uzla prútovej sústavy je možné vypočítať pomocou *Castiglianovej vety* s parciálnou deriváciou podľa sily, pôsobiacej v uzle, ktorého posunutie počítame, a v smere hľadaného posunutia. Pre výpočet posunutia uzla č.5 preto platí:

$$u_5 = \sum_{i=1}^9 \frac{N_i l_i}{ES} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_{5X}} \quad (5.6)$$

$$v_5 = \sum_{i=1}^9 \frac{N_i l_i}{ES} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_{5Y}} \quad (5.7)$$

Bezpečnosť prútov voči MSP a kontrola straty vzpernej stability prútov

U prútov namáhaných na ťah kontrolujeme len to, či bol, resp. nebol dosiahnutý medzný stav pružnosti (MSP). Bezpečnosť k MSP je definovaná ako podiel maximálneho dovoleného napätia, resp. medznej hodnoty napätia (medze klzu Re) a napätia v prúte, v dôsledku vonkajšieho zaťaženia.

$$k_{MSPi} = \frac{Re}{\sigma_i} \quad (5.8)$$

Prúty namáhané na tlak kontrolujeme voči MSP, ale je nutné vykonať kontrolu voči strate vzpernej stability prúta, teda, či nedošlo k vybočeniu. Celková bezpečnosť takto namáhaného prútu je daná stavom, ktorý nastane skôr. Kritérium na určenie toho, ktorý stav nastane skôr, je *štíhlosť prútu* λ .

$$\lambda_i = \frac{l_{oi}}{i_{min}} \quad (5.9)$$

kde i_{min} je *polomer zotrvačnosti*:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{S}} \quad (5.10)$$

kde J_{min} je *osový moment zotrvačnosti*. V úlohe predpokladáme prúty s kruhovým prierezom s obsahom S a priemerom D , preto:

$$J_{min} = \frac{\pi D^4}{64} \quad (5.11)$$

Dosadením (5.11) do (5.10), získame po úprave vzťah pre *polomer zotrvačnosti* pre prúty s kruhovým prierezom:

$$i_{min} = \frac{D}{4} \quad (5.12)$$

Podľa typu uloženia (obr.2.2) určíme hodnotu súčiniteľa otočenia α , v našom prípade $\alpha = \pi$, a vypočítame *medznú štíhlosť* λ_K :

$$\lambda_K = \sqrt{\frac{\alpha^2 E}{Re}} \quad (5.13)$$

V závislosti na príslušnej relácii vypočítame bezpečnosť buď vzhľadom k MSP alebo k medznému stavu vzpernej stability:

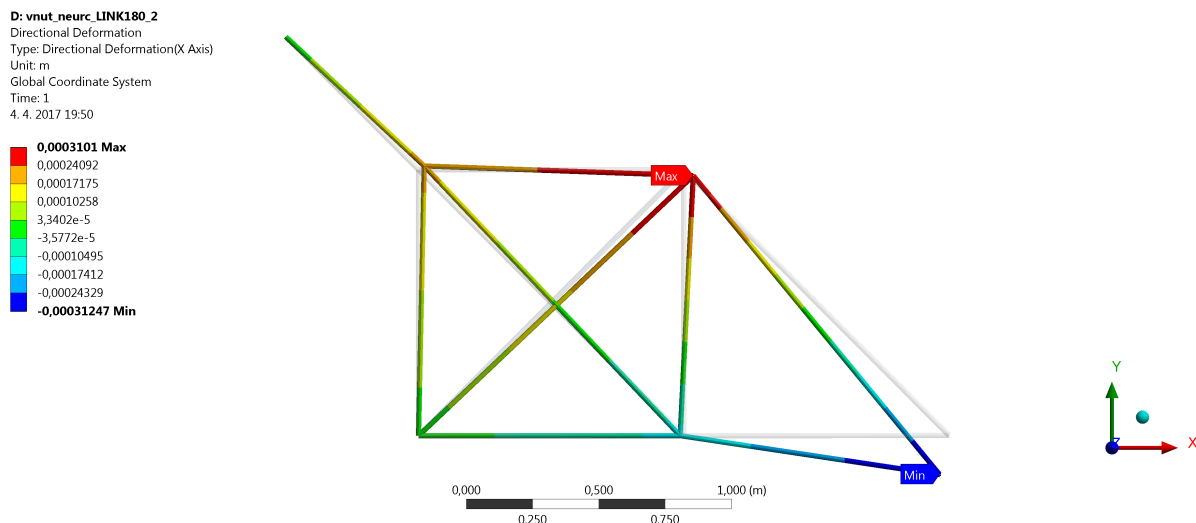
$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \lambda \geq \lambda_K & F_K = \frac{\alpha^2 E J_y}{l^2} \quad k_{kvzper} = \frac{F_K}{N_i} \\ \text{(b)} & \lambda < \lambda_K & \sigma_i = \frac{N_i}{S_i} \quad k_{kMSP} = \frac{Re}{\sigma_i} \end{array}$$

5.3. RIEŠENIE POMOCOOU PROGRAMU ANSYS

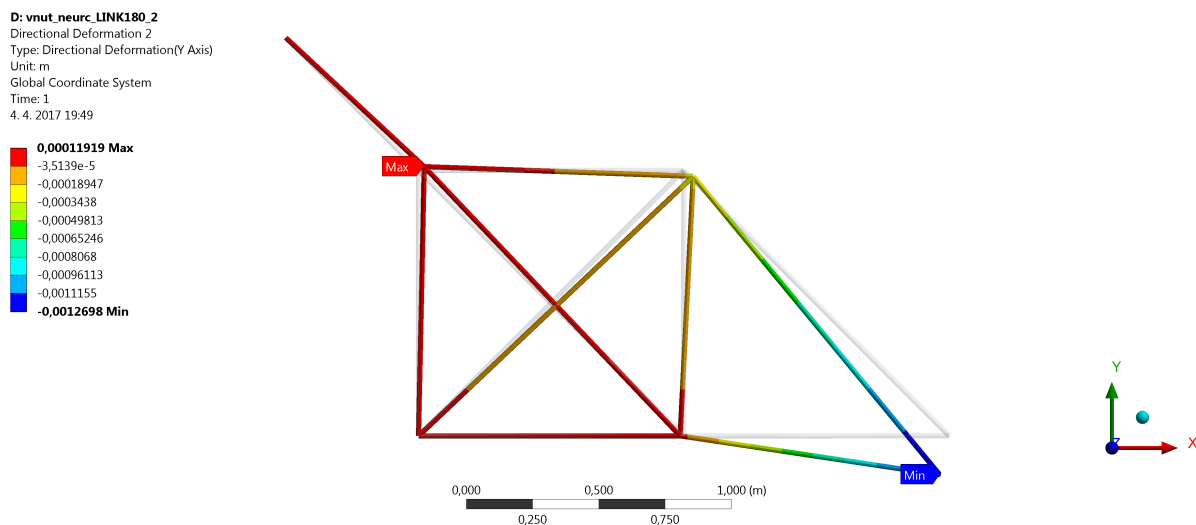
5.3. Riešenie pomocou programu ANSYS

V ANSYS-e budú overené výsledky získané aplikáciou *Prutovka_solver* a analytickým výpočtom. Keďže uvažujeme prútovú sústavu, ktorej prúty prenášajú len osovú záťaž, musíme v ANSYS-e definovať prútový prvok LINK180. Ďalej bol definovaný prierez prútov ako kruhový s plochou prierezu S , vybraný izotropný materiál, zadaný Youngov modul pružnosti v ťahu E a medza klzu Re .

5.3.1. Získané výstupy

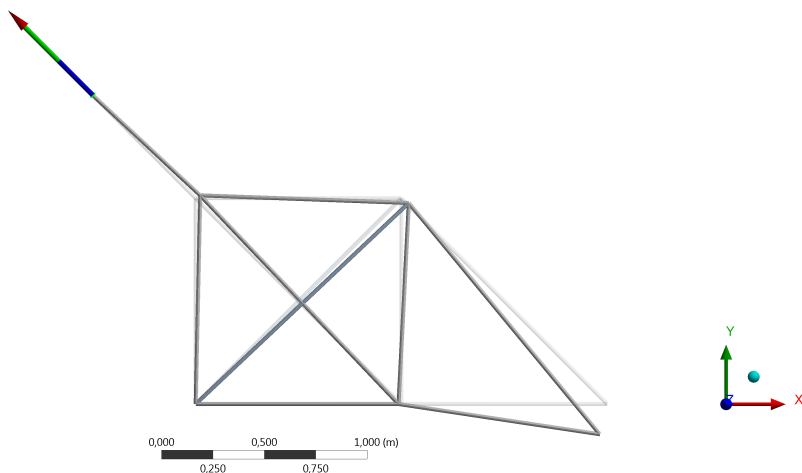


Obr. 5.11: Posunutie uzlov v ose x



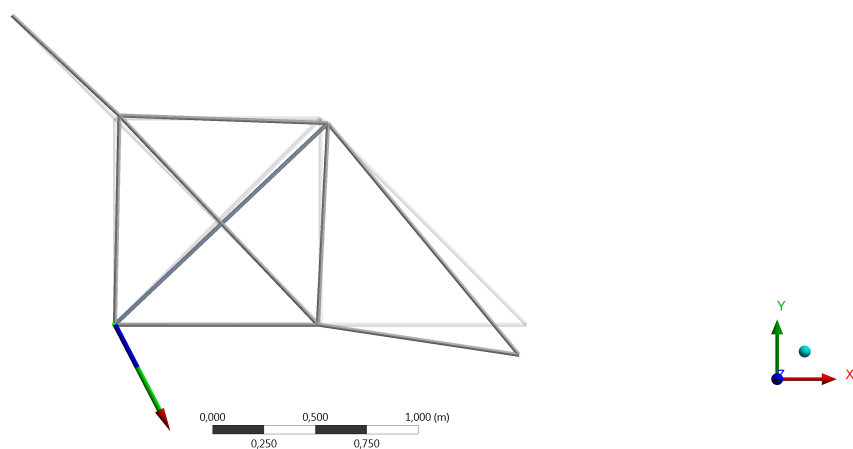
Obr. 5.12: Posunutie uzlov v ose y

D: vnut_neurc_LINK180_2
Force Reaction
4. 4. 2017 19:51



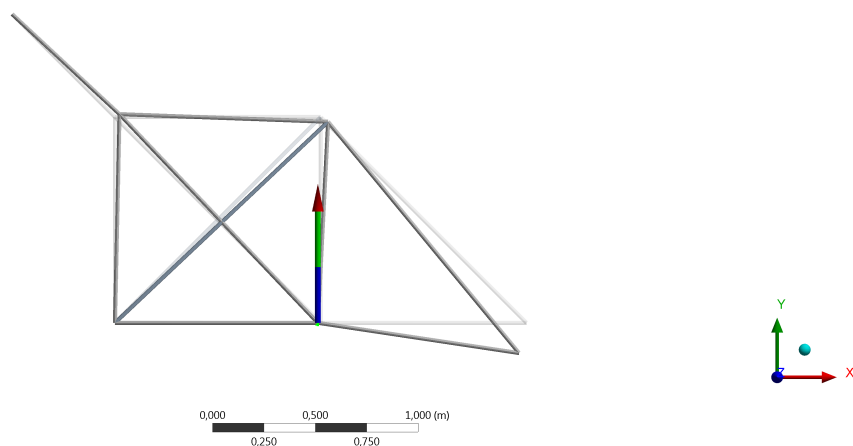
Obr. 5.13: Reakčná sila vo väzbe č.2

D: vnut_neurc_LINK180_2
Force Reaction 2
4. 4. 2017 19:51



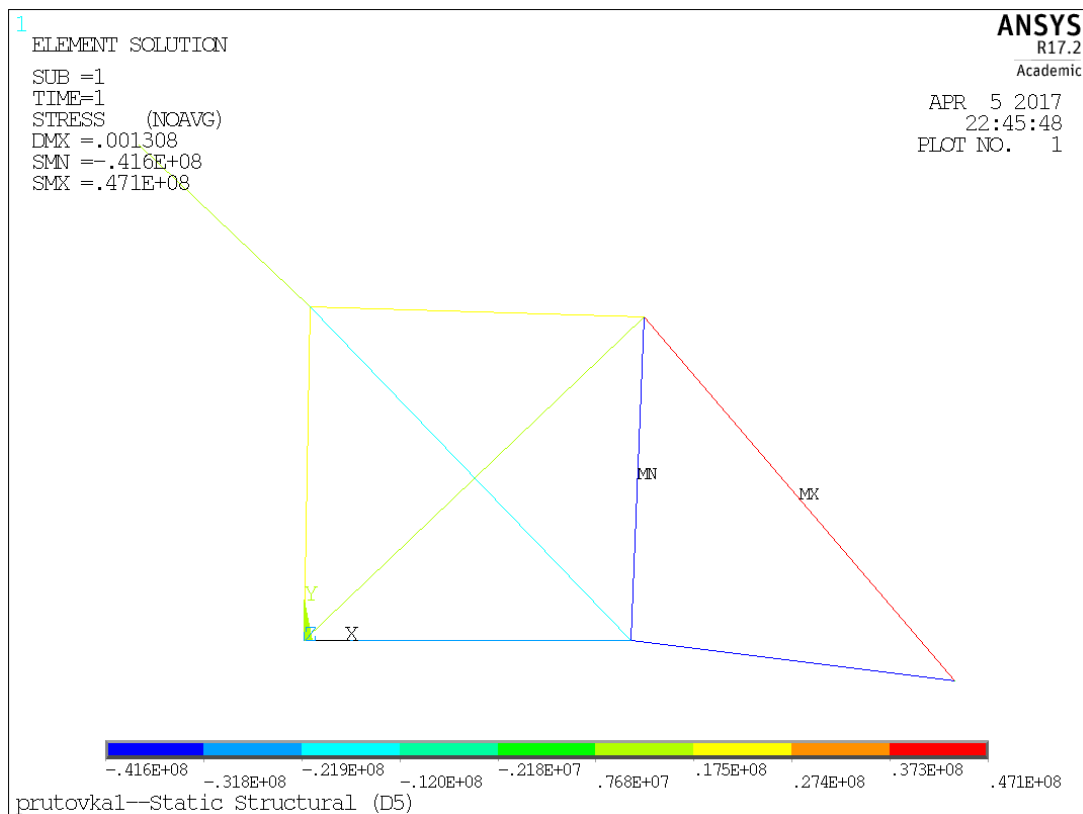
Obr. 5.14: Reakčná sila vo väzbe č.1

D: vnut_neurc_LINK180_2
Force Reaction 3
4. 4. 2017 19:51

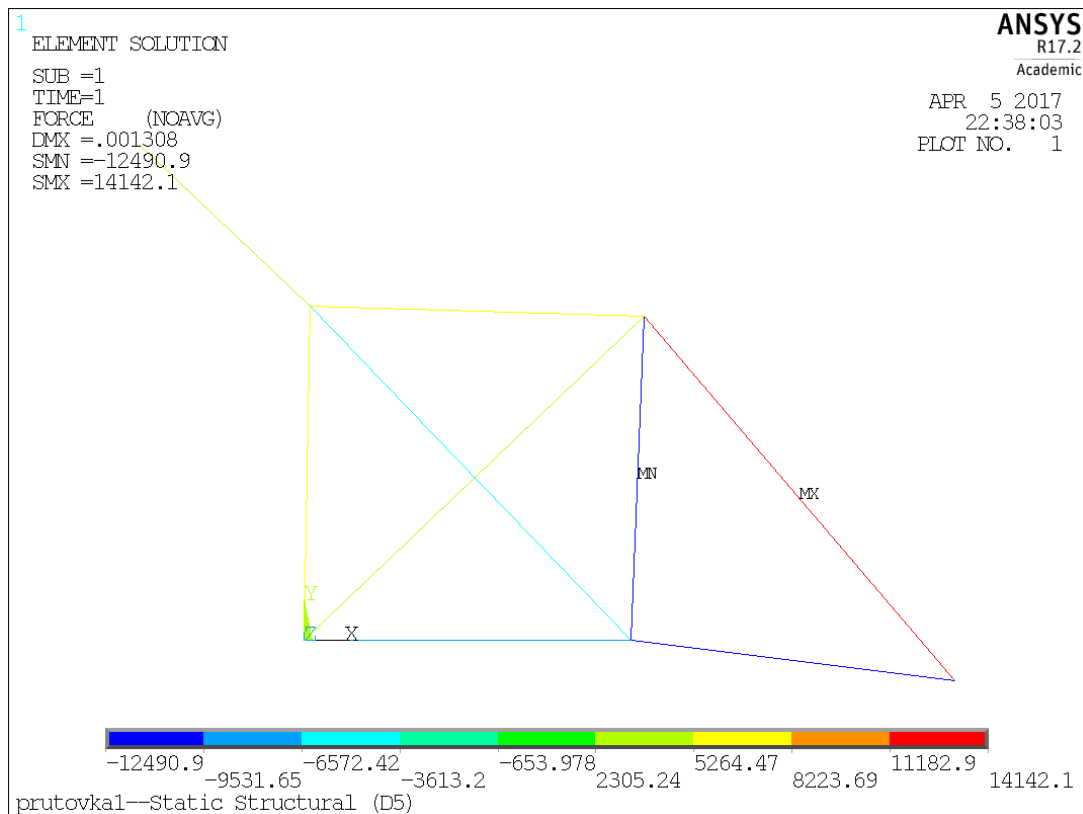


Obr. 5.15: Reakčná sila vo väzbe č.3

5.3. RIEŠENIE POMOCOU PROGRAMU ANSYS



Obr. 5.16: Napätia v prútoch



Obr. 5.17: Osové sily v prútoch

5.4. Porovnanie výsledkov

V nasledujúcich tabuľkách sú zhrnuté výsledky získané pomocou aplikácie *Prutovka_solver*, výsledky analytického riešenia a výstupy z programu ANSYS. Číselné hodnoty v tabuľke 5.5 a 5.6 sú uvedené len v absolútnej hodnote, pretože, pri úplnom uvoľnení prútovej sústavy, orientácie síl vo väzbách a síl vonkajšieho zaťaženia neboli volené v kladnom smere os súradného systému.

Tabuľka 5.1: Napätie v prútoch [MPa]

prút číslo	Prutovka_solver	Analytický	ANSYS
1	15,06	15,06	15,06
2	25,03	25,03	25,03
3	-25,62	-25,62	-25,62
4	11,74	11,74	11,74
5	-20,34	-20,34	-20,34
6	25,03	25,03	25,03
7	-41,64	-41,64	-41,64
8	-40	-40	-40
9	47,14	47,14	47,14

Tabuľka 5.2: Osová sila v prútoch [N]

prút číslo	Prutovka_solver	Analytický	ANSYS
1	4517,9	4517,9	4517,9
2	7509,1	7509,1	7509,1
3	-7685,5	-7685,5	-7685,5
4	3522,6	3522,6	3522,6
5	-6101,7	-6101,7	-6101,7
6	7509,1	7509,1	7509,1
7	-12491	-12491	-12491
8	-12000	-12000	-12000
9	14142	14142	14142

Tabuľka 5.3: Bezpečnosť prútov

prút číslo	Prutovka_solver	Analytický
1	$k_{MSP} = 17$	$k_{MSP} = 17$
2	$k_{MSP} = 10$	$k_{MSP} = 10$
3	$k_{MSP} = 1,9$	$k_{MSP} = 1,9$
4	$k_{MSP} = 21$	$k_{MSP} = 21$
5	$k_{vzper} = 1,2$	$k_{vzper} = 1,2$
6	$k_{MSP} = 10$	$k_{MSP} = 10$
7	$k_{vzper} = 1,2$	$k_{vzper} = 1,2$
8	$k_{vzper} = 1,2$	$k_{vzper} = 1,2$
9	$k_{MSP} = 5,3$	$k_{MSP} = 5,3$

5.4. POROVNANIE VÝSLEDKOV

Tabuľka 5.4: Dĺžkové pretvorenie prútov [mm]

prút číslo	Prutovka_solver	Analytický
1	0,051	0,051
2	0,119	0,119
3	-0,122	-0,122
4	0,079	0,079
5	-0,137	-0,137
6	0,119	0,119
7	-0,198	-0,198
8	-0,190	-0,190
9	0,317	0,317

Tabuľka 5.5: Posun uzlov [mm]

uzol číslo	Prutovka_solver		Analytický		ANSYS	
	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>
1	0	0			0	0
2	0	0			0	0
3	0,122	0			0,122	0
4	0,191	0,119			0,191	0,119
5	0,313	1,270	0,313	1,270	0,313	1,270
6	0,310	0,198			0,310	0,198

Tabuľka 5.6: Reakčné sily vo väzbách [N]

väzba číslo	Prutovka_solver		Analytický		ANSYS	
	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>
1	5194,6	10000	5194,6	10000	5194,6	10000
2	3194,6	3194,6	3194,6	3194,6	3194,6	3194,6
3	0	16805	0	16805	0	16805

6. Časová náročnosť výpočtu

Na riešenie 2D prútovej sústavy v kapitole 5 boli použité tri spôsoby riešenia. Z časového hľadiska je najnáročnejšie analytické riešenie. V prípade akejkoľvek zmeny okrajových podmienok, by bolo nutné opakovať celý výpočet, počnúc uvoľnením, cez rovnice rovnováhy až po vyčíslenie výsledkov.

Riešenie v programe ANSYS je časovo menej náročné v porovnaní s analytickým riešením. Avšak neumožňuje vizualizáciu výsledkov okamžite po zmene okrajových podmienok, lebo po akejkoľvek takejto zmene, je nutné inicializovať výpočet, ktorý trvá niekoľko sekúnd, v závislosti na rýchlosti konkrétneho počítača či výpočtového centra.

Aplikácia *Prutovka_solver* je najmenej náročná na čas výpočtu. Vďaka tomu umožňuje vizualizáciu výsledkov pri súčasnej zmene vstupných parametrov, a takto pomáha pri vytváraní predstavy o tom, ako sa daná prútová sústava správa pri rôznych vonkajších podmienkach. Vizualizácia výsledkov v reálnom čase je spôsob, ako jednoducho a rýchlo navrhnuť konštrukciu, zaťaženie či uloženie danej prútovej sústavy, s ohľadom na bezpečnosť či maximálnu deformáciu.

7. Záver

Cieľom práce bolo spracovať algoritmus na analýzu prútových sústav a vytvorenie aplikácie, ktorá daný algoritmus, založený na metóde konečných prvkov, využíva. Metóda konečných prvkov je vďaka rozvoju výpočtovej techniky, v súčasnej dobe, veľmi aktuálna. Aplikácia *Prutovka_solver* je výnimočná tým, že dokáže vizualizovať deformáciu, napätia a pod., paralelne so zmenou vonkajšieho zaťaženia pôsobiaceho v niektorom z uzlov prútovej sústavy. Tzn., že dochádza k okamžitej odozve na pridanie zaťaženia, resp. zmenu jeho veľkosti. Táto vlastnosť aplikácie umožňuje veľmi rýchlu a jednoduchú analýzu konkrétnej úlohy, a tak napomáha k vytvoreniu predstavy o tom, ako sa daná prútová sústava správa pri rôznych vonkajších podmienkach a ako na zmeny v zaťažení reaguje. V poslednej kapitole bola aplikácia použitá pri riešení konkrétneho problému. Po porovnaní výsledkov s analytickým riešením a riešením v ANSYSe je zrejmé, že algoritmus, ktorý aplikácia *Prutovka_solver* využíva, poskytuje veľmi presné výsledky.

Literatúra

- [1] FERREIRA, A. *MATLAB codes for finite element analysis: solids and structures*. Dordrecht: Springer Science & Business Media, 2009. Solid mechanics and its applications, 157. ISBN 1402092008-.
- [2] FLORIAN, Zdeňek, Emanuel ONDRÁČEK a Karel PŘIKRYL. *Mechanika těles: Statika*. 2. vyd. Brno: Akademická nakladatelství CERM, s.r.o. Brno, 2007. ISBN 978-80-214-3440-0.
- [3] HORNÍKOVÁ, Jana. *Pružnost a pevnost*. BRNO, 2009. 142 s. Oborová práce. FSI VUT.
- [4] JANÍČEK, Přemysl, Emanuel ONDRÁČEK, Jan VRBKA a Jiří BURŠA. *Mechanika těles: Pružnost a pevnost I*. 3. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. Brno, 2004. ISBN 80-214-2592-X.
- [5] JULIŠ K.; BREPTA R.a kol.: *Mechanika I.díl : Statika a kinematika*. Praha : SNTL, 1986. 477 s. ISBN 04-224-86.
- [6] KOVAČIK, J., BENIAČ, M.: *Pružnosť a pevnosť pre špeciálne inžinierstvo*. Žilina, 2005. 191 s. Oborová práce. ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE, FŠI. ISBN 80-8070-433-3.
- [7] KOVAČIK, J., BENIAČ, M.: *Statika pre špeciálne inžinierstvo*. Žilina, 2005. 130 s. Oborová práce. ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE, FŠI. ISBN 80-8070-077.
- [8] PETRUŠKA, Jindřich. *MKP v inženýrských výpočtech* [online]. Učební text FSI VUT Brno, 2011, 112 s. Dostupné z: <http://www.umt.fme.vutbr.cz/img/fckeditor/file/opory/RIV/MKP2011.pdf>
- [9] ZIENKIEWICZ, O. C. *The Finite Element Method*. 3. vyd. McGraw-Hill Book Company (UK) Limited, 1977, 787 s. ISBN 0-07-084072-5.

8. Zoznam použitých symbolov a skratiek

Symbol	Rozmer	Veličina
α	[-]	súčiniteľ natočenia
D	[mm]	priemer prierezu prútu
E	[MPa]	Youngov modul pružnosti
F	[N]	sila
F_{kr}	[N]	kritická sila vzperu
i	[-]	počet stupňov voľnosti sústavy
i_v	[-]	počet stupňov voľnosti voľného telesa
i_{min}	[mm]	polomer zotrvačnosti
J	[mm ⁴]	kvadratický moment prierezu
J_{min}	[mm ⁴]	osový moment zotrvačnosti
k	[-]	počet degenerovaných členov
K_{msp}	[-]	bezpečnosť voči medznému stavu pružnosti
K_{vzper}	[-]	bezpečnosť voči strate vzpernej stability
l_{red}	[mm]	redukovaná dĺžka
L_p	[mm]	dĺžka prvku
λ_i	[-]	štíhlosť prútu
λ_K	[-]	medzná štíhlosť
μ	[-]	počet neznámych parametrov vonkajších stykových síl
ν	[-]	počet použiteľných statických podmienok rovnováhy
η	[-]	počet obmedzených deformačných parametrov
n	[-]	počet telies
N	[-]	bázová funkcia
N	[N]	normálová sila
P	[J]	potenciál vonkajšieho zaťaženia
p	[-]	počet prútov
Π	[J]	celková potenciálna energia
R	[N]	reakčná sila
Re	[MPa]	medza klzu
s	[-]	stupeň statickej neurčitosti
S	[mm ²]	obsah plochy prierezu
σ	[MPa]	napätie
u	[mm]	posunutie
v	[mm]	posunutie
w	[mm]	posunutie
W	[J]	energia napätosti telesa
ζ	[-]	počet stupňov voľnosti odobraných väzbov

8. ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV A SKRATIEK

Matica	Názov
B	matica tvaru funkcie pretvorenia nad prvkom
δ	matica deformačných parametrov
ε	pretvorenie
f	prvková matica vonkajšieho zaťaženia
F	celková matica vonkajšieho zaťaženia
k	prvková matica tuhosti
K	celková matica tuhosti
L	transformačná matica
N	matica bazových funkcií
o	objemová zaťaženie
p	plošné zaťaženie
σ	napätie
u	posuv
U	celková matica deformačných parametrov

Skratka	Význam
MKP	metóda konečných prvkov
obr.	obrázok
resp.	respektíve
t. j.	to jest
tzn.	to znamená
VVÚ	výsledné vnútorné účinky

9. Prílohy

Ku práci je priložené CD, na ktorom je uložený zdrojový kód aplikácie *Prutovka_solver*.